通信考研小马哥

信号与系统

Signals and Systems

25小马哥公式宝典

同名公众号：通信考研小马哥

B站关注：通信考研小马哥

官网：tongxinkaoyan.com

通信考研小马哥

2025版信号与系统公式宝典

纸质版本拼团9.9（只收打印成本费）：

梦马班今年无纸质版公式宝典，这个确实打印成本太高了，希望大家理解下，我们梦马班今年6本资料，只能挑最重要的为大家打印。公式宝典请大家按需，用电子版自己打印，或者直接微信扫码拼团也可以。

通信考研小马哥

2025版信号与系统公式宝典

小马哥系列丛书（淘宝搜索）：

《信号与系统考研精析960题》

《信号与系统考研终极预测3+1》

前言

哈喽大家好，我是通信考研小马哥，这是我做的**第二版公式宝典**，已经集合我目前所有能想到的重点公式！绝对没有任何保留。

PS：我觉得这将是全网最全、最好的公式宝典！

每一个公式下面，我都放了我对这个公式的看法，对考研来说的重要程度(都是小马哥的心血)。这份公式宝典，我会每年持续更新勘误，补充完善，永久免费。**若发现错误还请帮我提交下，公众号通信考研小马哥，后台回复勘误，感谢！**

欢迎转载，但是请不要收费。

有朋友会疑惑为啥我出了这么多高质量的免费资料，而且还要持续勘误，给自己增加工作量。 我的想法很简单，我也曾是在暴风雨中奔跑过的人，所以会想给此时的你们也撑把伞。一路走来，收获了成千上万个认可支持我的学弟学妹，看到你们踏过荆棘，苦尽甘来，想到自己也小小的助力了一把，就会觉得骄傲，欣喜，值得！另外也是饮水思源，想做这些分享，尽可能给大家回馈，同时，让更多的人认识我们，在通信考研的学习中，我们始终都是双向奔赴！

最后如果大家上岸了，请不要吝啬，大胆的把小马哥推荐给你们的学弟学妹们！

——2024 年 5 月 20 日

目录

第一章 数理知识

1.1 三角函数公式

1.1.1 和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

小马哥 Tips：必会，考研会考，中科大 23 真题。

1.1.2 辅助角公式

$$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\qquad \varphi=\arctan\frac{b}{a}$$

小马哥 Tips：掌握，考研会考，频次不高。

1.1.3 和差化积、积化和差

(1)和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

小马哥 Tips：了解，频次不高。

(2)积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

小马哥 Tips：必会，考研会考，高频调制题目，掌握后时域化简，可事半功倍。

1.1.4 倍角和半角公式（降幂公式）

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)]$$

小马哥 Tips：必会，考研会考，高频调制题目，掌握后时域化简，可事半功倍。

1.2 复变函数基础

手机扫码观看/分享

【讲解】信号与系统中的复变函数基础知识

1.2.1 复变函数积分的定义

(1)代数式：

$$z = a + jb$$

(2)三角式：

$$z = A(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

(3)指数式：

$$z = Ae^{j\varphi}$$

1.2.2 欧拉公式

$$e^{j\omega}=cos\,\omega+jsin\,\omega$$

1.2.3 欧拉逆向公式

$$\sqrt{a^2+b^2}e^{jarctan\frac{b}{a}}=a+bj$$

1.2.4 复数的共轭

（在j前面加负号注：实数的共轭是其本身。）

$$z^*=a-bj$$

1.2.5 复数模值（振幅）和相角（相位）

$$z=\sqrt{a^2+b^2}e^{jarctan\frac{b}{a}}=a+jb$$

则z的模值为$\sqrt{a^2+b^2}$，z的相角为$arctan\frac{b}{a}$

此公式只在$a>0$时成立，因为$arctan\frac{b}{a}$的值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,只能处理第一和第四象限的相位，若相位在第二象限，第三象限，先用$e^{j\pi}$转化到第一第四象限再进行处理。或用矢量作图法求解。否则会得出错误的结果。

举例：$1-j$和$j-1$的相位，用公式$arctan\frac{b}{a}$都是$-\frac{\pi}{4}$，但是$j-1$的相位实际是$\frac{3\pi}{4}$。

总结公式（$\boldsymbol{arg}\,z$代表z的相位）：

$$\boldsymbol{arg}\,z=\begin{cases}arctan\,\frac{b}{a}, & 当a>0；\\ \frac{\pi}{2}, & 当a=0，且b>0；\\ -\frac{\pi}{2}, & 当a=0，且b<0；\\ arctan\,\frac{b}{a}+\pi, & 当a<0，且b\geq 0；\\ arctan\,\frac{b}{a}-\pi, & 当a<0，且b<0；\end{cases}$$

小马哥 Tips：太重要了！错误率极高。

手机扫码观看/分享

【讲解】矢量作图法补课

1.2.6 复数的基本运算

$$A_1 = a + bj，A_2 = m + nj$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a + bj}{m + nj} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{j\arctan\frac{b}{a} - j\arctan\frac{n}{m}}$$

小马哥 Tips：复变函数基础，整个信号考研的基础。

1.3 常用不等式

#	基本不等式	变形公式	注意
1	$a^2 + b^2 \geq 2ab$ $(a，b \in R)$	$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$	(当且仅当$a = b$时取"$=$"号)
2	$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a，b \in R^+)$	$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$	(当且仅当$a = b$时取到等号)
3	$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ $(a，b，c \in R^+)$	-	(当且仅当$a = b = c$时取到等号)
4	$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ $(a, b \in R)$	-	(当且仅当$a = b = c$时取到等号)
5	$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ $(a > 0，b > 0，c > 0)$	-	(当且仅当$a = b = c$时取到等号)
6	若$ab > 0$，则	-	(当仅当$a = b$时取等号)

	$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$		
7	若$ab<0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leq -2$	-	(当仅当$a=b$时取等号)
8	$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$ 其中$(a>b>0，m>0，n>0)$	-	-
9	当$a>0$时 $\lvert x\rvert>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x<-a$ 或$x>a$ $\lvert x\rvert<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$	-	-
10	绝对值三角不等式 $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\leq\lvert a\pm b\rvert\leq\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	-	-

小马哥 Tips：

（3）-（10）考频极低，没时间可以不看，中科院 23 年考了(2)，均值不等式在求幅频特性的极值有奇效，看看吧。

1.4 泊松积分、高斯积分

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-Ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{A}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

小马哥 Tips：**中科大 23 年好几道题，都是这，掌握，普通院校可不看。**

1.5 正交函数

1.5.1 两个函数正交的条件

两个函数正交的条件：杂交为 0，自身的内积（模的平方）不为 0。

$$\int_0^T f_1(t)\,f_2^*(t)dt=0$$

$$\int_0^T f_1(t)\,f_1^*(t)dt\neq 0$$

$$\int_0^T f_2(t)\,f_2^*(t)dt\neq 0$$

小马哥 Tips：23 好多院校考察这个概念，要求证明，必会。

1.5.2 正交函数集

正交函数集：在某一时间段的信号可以利用完备正交函数集的各个分量的线性组合来表示

①如有定义在(t_1,t_2)区间两个实数函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$，若满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt=0$$

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$在区间(t_1,t_2)内正交。**杂交为 0，自交不为 0**

②如有n个实数函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，⋯，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在区间(t_1,t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=\begin{cases}0, & 当 i\neq j\\ K_i\neq 0, & 当 i=j\end{cases}$$

则此函数集称为正交函数集。

1.5.3 正交复变函数集

正交复变函数集：在某一时间段的信号可以利用完备正交函数集的各个分量的线性组合来表示

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, & 当 i\neq j\\ K_i\neq 0, & 当 i=j\end{cases}$$

则此复变函数集称为正交复变函数集。

小马哥 Tips：正常院校不会考这东西，但是看中山大学 23 年的尿性，这个你得看。

1.6 信号周期性的判断

手机扫码观看/分享

【讲解】周期性判断实战例题

信号的周期性判断：

有理数是指两个整数的比，有理数是整数和分数的集合。无理数是指实数范围内不能表示成两个整数之比。

#	连续	离散
复指数函数周期性（欧拉公式）	$e^{j\omega_0 t}$的周期为$\frac{2\pi}{\omega_0}$ 若两个信号相加$f_1(t)+f_2(t)$ 则周期为最小公倍数$[T_1，T_2]$	$e^{j\omega_0 n}$的周期存在，需要$\frac{2\pi}{\omega_0}$为有理数（两个整数的比），若$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}$，则周期为$N$ 可以理解为找$\frac{N}{m}$和 1 的最小公倍数。 若两个信号相加$f_1(n)+f_2(n)$ 则周期为最小公倍数$[m_1，m_2]$

Q1:什么是基波周期？

任何一个信号都可以表示成基波分量和无数谐波分量的正余弦信号相加，其中最长周期（也就是频率最小）的那个分量叫做基波。他的周期就是基波周期。

小马哥 Tips：必考，书上很多课后题，练几道题，问题不大，无需死记硬背。

Q2:什么是最小公倍数？

两个或多个整数公有的倍数叫做它们的公倍数。

Q3:什么是倍数？

一个整数能够被另一个整数整除，这个整数就是另一整数的倍数。如 15 能够被 3 或 5

整除，因此 15 是 3 的倍数，也是 5 的倍数。

小马哥 Tips：别笑！好多同学真的不懂什么是最小公倍数！好多同学觉得 2 和π的最小公倍数是 2π。2π不是 2 的整数倍！所以不对！

1.7 泰勒级数展开公式

(1)$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$；

(2)$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$；

(3)$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$；

(4)$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$；

(5)$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$；

(6)$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

例题：

1、求$\frac{1}{n!}$的单边 z 变换。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \cdots = e^{\frac{1}{z}}$$

2、求$\sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!}$的$z$变换。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \cdots = e^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{a^n}{n!} \leftrightarrow e^{\frac{a}{z}}$$

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!} \leftrightarrow F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}e^{\frac{a}{z}}$$

$$f(k) = \sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!} \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{z-1}e^{\frac{a}{z}}$$

小马哥 Tips：**这个知识点的确会考，且不超纲，掌握到我给出两道例题这种程度即可！**

第二章 常见信号及其分类

2.1 连续时间信号

2.1.1 典型连续信号

#	信号类别	表达式
1	实指数信号	$f(t)=Ae^{at} \quad a\in R$
2	复指数信号	$f(t)=Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}\ (-\infty<t<\infty)$ $s=\sigma+j\omega$称为复频率
3	双边指数信号	$f(t)=Ke^{-at}\ (-\infty<t<\infty)$
4	单边指数信号	$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t\geq 0\end{cases}$
5	正弦信号	$f(t)=Ksin(\omega t+\theta) \quad (-\infty<t<\infty)$
6	钟形函数(高斯函数)	$f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$
7	三角波	$Etri_{2\tau}(t)=E\left[1-\frac{\lvert t\rvert}{\tau}\right]G_{2\tau}(t)$
8	抽样信号	$Sa(t)=\frac{sint}{t}$

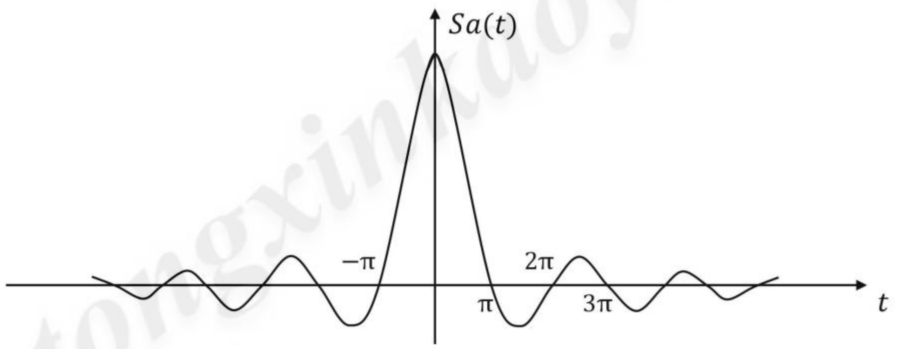
小马哥 Tips：熟悉熟悉，一般背拉普拉斯变换对，不在这里考。

2.1.2 抽样信号

①函数表达式

$$Sa(t)=\frac{sint}{t}$$

②抽样信号



频带宽度：第一过零点，为右侧与横轴相交的第一个零点，也是频带宽度。

③抽样信号的基本性质

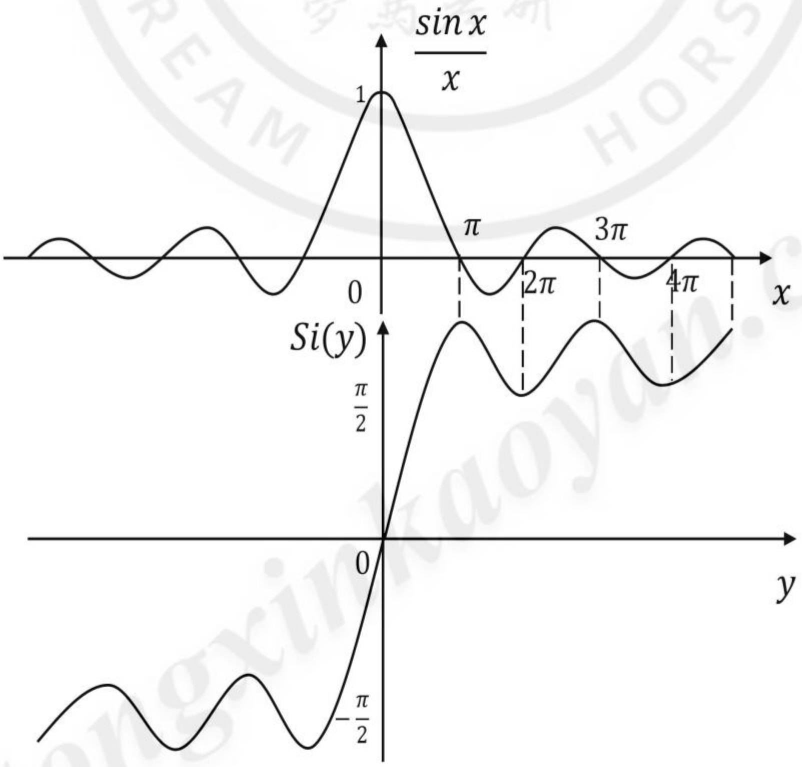
#	性质
1	偶函数　$Sa(-t)=Sa(t)$
2	$t=0$，$Sa(t)=1$，即 $lim_{t\to 0}Sa(t)=1$
3	$Sa(t)=0$，$t=\pm n\pi$，$n=1，2，3，\cdots$
4	$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt=\pi$
5	$lim_{t\to\pm\infty}Sa(t)=0$
6	$sinc(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

小马哥 Tips：

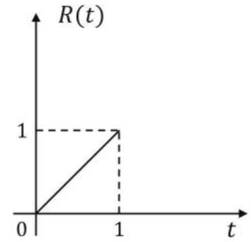
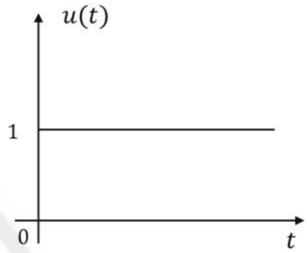
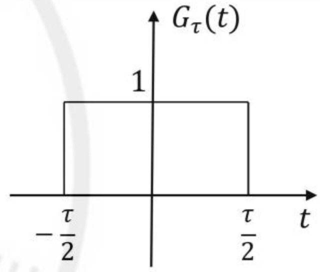
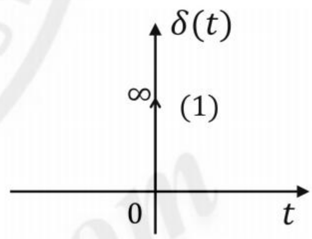
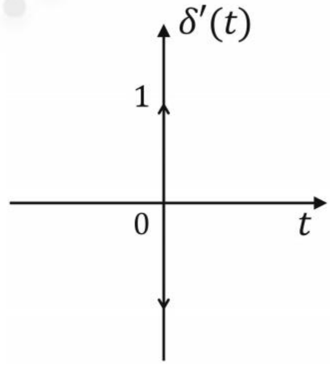
①重要，熟练掌握，并会画图，尤其是第1，2，3条。

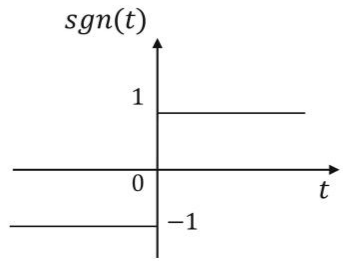
②$\frac{\sin x}{x}$的积分称作正弦积分，其符号为$Si(y)$，即

$$\boldsymbol{Si(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}\,dx}$$



2.1.3 奇异信号

#	信号种类	表达式	图形
1	斜变信号(斜坡信号或斜升信号)	$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}$	
2	单位阶跃信号	$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$，$t=0$ 点无定义或 $\frac{1}{2}$	
3	单位门信号	$G_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	
4	单位冲激信号	$\delta(t)=lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$，$\delta(t)=0\ (t\neq 0)$	
5	冲激偶$\delta^{'}(t)$	冲激信号的导数，是一个奇函数，它的宽度和面积都为零。 即 $\frac{d\delta(t)}{dt}=\delta^{'}(t)$ $\int_{-\infty}^{t}\delta^{'}(\tau)d\tau=\delta(t)$	

6	符号函数	$sgn(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$ $\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}sgn(t)$ $sgn(t)=2\varepsilon(t)-1$	

2.1.4 单位冲激信号性质

#	基本性质	内容
1	归一性	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$
2	筛选（分）性	$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$ $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$
3	抽样性	$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$ $f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$
4	偶函数	$\delta(-t)=\delta(t)$
5	尺度变换	$\delta(at)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(t)$，$a$为常数 $\delta(at+b)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$，$a$、$b$为常数
6	卷积性	$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$
7	积分性	$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$ $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ $f(t)u(t)*u(t)=\int_{0}^{t}f(\tau)d\tau$
8	微分特性	$\delta'(t)=\frac{d}{dt}[\delta(t)]$ $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

9	复合函数化简性质	$\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left\|f'(t_i)\right\|}\delta(t-t_i)$ 其中$t_i(i=1，2，\ldots，n)$为$f(t)=0$的n个不相等实根

2.1.5 冲激偶$\delta'(t)$的性质

#	基本性质	内容
1	积分性	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$ $\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau$
2	筛选（分）性	$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ $f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$
3	抽样性	$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$
4	奇函数	$\delta'(-t)=-\delta'(t)$
5	尺度变换	$\delta'(at)=\frac{1}{a\cdot\|a\|}\delta'(t)$，$a$为常数 **推导方式：对$\boldsymbol{\delta(at)=\frac{1}{\|a\|}\delta(t)}$，两边同时求微分。**
6	卷积性质	$x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$
7	微分性质	$\delta^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k}[\delta(t)]$

小马哥 Tips：

①**注：**一般情况下（Only For 奥本），$k>0$ 时，$u_k(t)$就是$\delta(t)$的k次导数，$u_0(t)=\delta(t)$，$u_1(t)=\delta'(t)$，$u_{-1}(t)=u(t)$。

②熟练掌握 1，2，4，5 的关系：

单位斜变信号$tu(t)$求导→单位阶跃信号$u(t)$求导→单位冲激信号$\delta(t)$求导→冲激偶$\delta'(t)$

手机扫码观看/分享

【讲解】冲激和冲激偶的性质

2.1.6 信号的基本运算

#	信号基本运算	内容
1	平移	$f(t)\to f(t\pm t_0)$“左+右−”t_0个单位，不影响纵坐标
2	反转（反褶）	$f(t)\to f(-t)$沿纵轴左右反转，不影响纵坐标
3	尺度变换	$f(t)\to f(at)$，$0<a<1$ 扩展$a>1$ 压缩，不影响纵坐标
4	加减法	$f(t)=x_1(t)+x_2(t)$
5	乘法	$f(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$
6	幅度加权	$f(t)=ax(t)$
7	微分	$\frac{df(t)}{dt}$
8	积分	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

小马哥 Tips：

①**注：**信号运算的一切变换只针对于t，不同的运算次序，不影响最终的结果

②尺度变换一般不影响纵坐标，但是**冲激的尺度变换需要额外注意**，会影响到纵坐标！

手机扫码观看/分享

【讲解】信号分类和基本运算

2.1.7 信号的分解

#	分解方法	公式
1	直流分量与交流分量	$f(t)=f_D+f_A(t)$ 直流信号为信号的均值 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt$
2	奇偶分量的分解	$f(t)=f_e(t)+f_0(t)$ $Ev\{f(t)\}=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$ $Od\{f(t)\}=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$ $f_e(t)=f_e(-t)$，$f_0(t)=-f_0(-t)$
3	共轭对称分量分解	共轭对称分量： $f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$ $f(t)=f^*(-t)$ 共轭反对称： $f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$ $f(t)=-f^*(-t)$ **若$f(t)$为实数，共轭对称分量等于偶分量，共轭反对称分量等于奇分量。信号里面基本都是实数。**
4	脉冲分量	$f(t)\approx\sum\limits_{t_1=-\infty}^{\infty}f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$ $f(t)=\lim\limits_{\Delta t_1\to 0}\sum\limits_{t_1=-\infty}^{\infty}f(t_1)\delta(t-t_1)\Delta t_1$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_1)\delta(t-t_1)dt_1$
5	实部分量与虚部	$f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$

	分量	$f^*(t)=f_r(t)-jf_i(t)$ $f_r(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f^*(t)]$ $jf_i(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f^*(t)]$
6	正交函数分量	三角函数集分解: $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$ 复指数函数集分解: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$

小马哥 Tips：除了第 4 点，都要熟练掌握！

手机扫码观看/分享

【讲解】连续信号的分解

2.1.8 连续时间信号的微分运算

(1)

$$\frac{d}{dt}[u(t)]=\delta(t)$$

(2)

$$\frac{d}{dt}[x(t)u(t)]=\frac{d}{dt}[x(t)]u(t)+x(0)\delta(t)$$

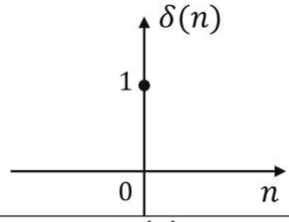
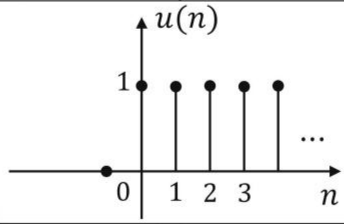
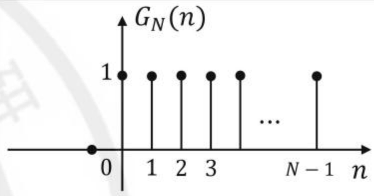
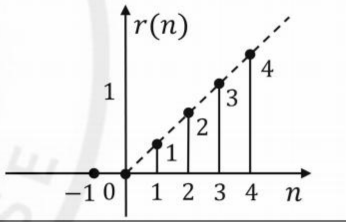
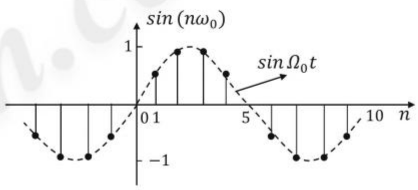
2.2 离散时间信号

2.2.1 离散时间信号的运算

#	内容	表达式	
1	前向差分	一阶前向差分	$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$
		二阶前向差分	$\Delta^2 x(n)=\Delta[\Delta x(n)]=\Delta[x(n+1)-x(n)]=x(n+2)-2x(n+1)+x(n)$
		三阶前向差分	$\Delta^3 x(n)=\Delta[x(n+2)-2x(n+1)+x(n)]=x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n)$
2	后向差分	一阶后向差分	$\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$
		二阶后向差分	$\nabla^2 x[n]=x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$
		三阶后向差分	$\nabla^3 x(n)=\nabla[x(n)-2x(n-1)+x(n-2)]=x(n)-3x(n-1)+3x(n-2)-x(n-3)$
3	相加	$y[n]=x_1[n]+x_2[n]$	
4	相乘	$y[n]=x_1[n]\cdot x_2[n]$	
5	幅度加权	$y[n]=ax[n]$	
6	反折	$y[n]=x[-n]$	
7	时移	$y[n]=x[n-n_0]$	
8	尺度变换	$x_k[n]=\begin{cases}x(\frac{n}{k}) & \text{若}n\text{是}k\text{的整数倍}\\ 0 & \text{若}n\text{不是}k\text{的整数倍}\end{cases}$	
9	典型信号的差分	$\nabla u[n]=\delta[n]$ $\nabla nu[n]=u[n-1]$ $\nabla n^2u[n]=(2n-1)u[n-1]$	
10	典型信号的求和	$\sum_{m=-\infty}^{n}u[m]=(n+1)u[n]$ $\sum_{m=-\infty}^{n}mu[m]=\frac{1}{2}n(n+1)u[n]$ $\sum_{m=-\infty}^{n}a^mu[m]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$，$a\neq 1$	

小马哥 Tips: 至少要知道不同符号是什么意思！

2.2.2 典型的离散信号

#	信号类别	表达式	图形
1	单位冲激序列	$\delta(n)=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$	
2	单位阶跃序列	$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$	
3	矩形序列	$G_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leq n\leq N-1\\ 0 & n<0，n\geq N\end{cases}$	
4	单位斜变序列	$r(n)=nu(n)$	
5	单边指数序列	$x(n) = a^n u(n)\begin{cases}0<a<1 & n=0\text{ 时为 }1\text{，收敛序列}\\ a>1 & n=0\text{ 时为 }1\text{，递增序列}\\ -1<a<0 & \text{正负相间，递减序列}\\ a<-1 & \text{正负相间，递增序列}\end{cases}$	
6	正弦序列	$x(n)=sin(n\omega_0)$ 或 $x(n)=cos(n\omega_0)$	
7	复指数序列	$x(n)=e^{j\omega_0 n}=cos\omega_0 n+jsin\omega_0 n$ 复序列用极坐标表示: $x(n)=\|x(n)\|e^{jarg[x(n)]}$ 其中： $\|x(n)\|=1，arg[x(n)]=\omega_0 n$	-

手机扫码观看/分享

【讲解】常见离散信号

2.2.3 冲激序列基本性质

#	基本性质	内容
1	筛选性质	$f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)$ $f(n)\delta(n-i)=f(i)\delta(n-i)$
2	差分性质	$\delta(n)=u(n)-u(n-1)\Rightarrow h(n)=g(n)-g(n-1)$
3	求和性质	$u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}\delta(i)=\sum_{i=0}^{\infty}\delta(k-i)$ $h(n)*u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}h(i)$
4	组合性质	$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]$
5	卷积特性	$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

小马哥 Tips：**重点掌握！无需背诵，理解即可，题目已经做好多遍了。**

正弦序列周期性的判别：

$\frac{2\pi}{\omega_0}=N$，若N是正整数，则正弦序列是周期的序列；

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}$，$N$，$m$均为正整数，$\frac{N}{m}$为有理数，$\sin\omega_0 n$仍为周期的序列；

$\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数，$\sin\omega_0 n$为非周期的序列。

2.2.4 离散时间单位冲激信号$\delta[n]$的基本性质

#	性质	表达式
1	筛选性	$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$
2	组合性	$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]$
3	求和	$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$，$u[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-m]$
4	卷积特性	$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

小马哥 Tips：**重点掌握！注意区分连续和离散的区别。**

手机扫码观看/分享

【讲解】常见离散信号及其性质

2.3 能量信号与功率信号

2.3.1 求解公式

#	物理量	连续信号	离散信号
1	能量	$E=lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert f(t)\rvert^2\ dt$	$E=lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$
2	功率	$P=lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert f(t)\rvert^2\ dt$	$P=lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$

2.3.2 能量守恒、帕斯瓦尔定理和内积不变性

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

小马哥 Tips：重点掌握！注意我们求解能量的时候会用到。$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$，此时可以利用到能量移位能量不变性质，将$f(t)$拆解分段，平移成过原点直线，会大大简化计算量！

手机扫码观看/分享

【讲解】从单边谱双边谱求能量和功率

2.3.3 能量谱密度函数

$|F(\omega)|^2$，$|X(e^{j\omega})|^2$为能量信号的能量频谱密度，简称能量谱。它描述了单位频带内信号的能量随ω分布的规律。

2.3.4 功率守恒

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

其中a_k为**离散傅里叶级数**，求解公式为

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

2.3.5 功率谱密度函数

$$\Phi(\omega)=2\pi\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\delta(\omega-n\omega_1)，\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

小马哥 Tips：**重点掌握！帕斯瓦尔最好会推导！可能考察证明！功率谱会考察画图，公式记住！能量谱和功率谱我们一般和维纳辛钦定理一起考察。**

2.4 连续与离散信号分析的特点

2.4.1 连续与离散的区别

#	连续时间信号（模拟信号）	离散时间信号（数字信号）
1	幅值可以是连续的，也可以只取某些规定值	时间上是离散的，时间取值可以是均匀的，也可以是不均匀的。
2	信号的时域运算中，连续时间信号是对自变量的微分、积分运算，离散时间信号是差分、求和运算。	

小马哥 Tips： 可能考察简答题。

2.4.2 $\delta(t)$与$\delta(n)$的区别与联系

#	$\delta(t)$	$\delta(n)$
1	用积分值(面积)表示信号的强度， $t\to 0$，$\delta(t)$的幅度为∞。 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$，$\delta(t)=0\ (t\neq 0)$	在$n=0$时的值就是瞬时值 1，没有面积概念
2	$\delta(t)$与$u(t)$是微积分关系 $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$ $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$	$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系 $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ $u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$

2.4.3 离散信号$sin\omega_0 n$与连续信号$sin\Omega_0 t$的关系与区别

#	离散信号$sin\omega_0 n$	连续信号$sin\Omega_0 t$
1	ω_0为离散域的正弦数字角频率	Ω_0为连续正弦函数的模拟角频率
2	ω_0的单位为rad	Ω_0的单位为rad/s
3	数字角频率	模拟角频率

小马哥 Tips： 这个单位的区别，可以了解下，挺有趣的！

第三章 LTI 系统及响应求解

3.1 连续时间系统的时域分析

3.1.1 时域求解系统响应方法

①经典法：齐次解+特解（非零初始值）；

②双零法：

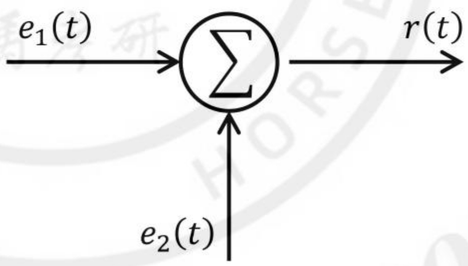
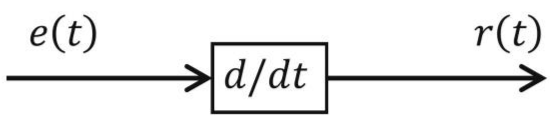
零输入响应可用经典法求解齐次方程（非零初始值）；

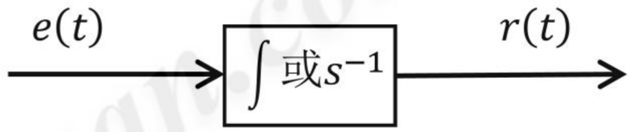
零状态响应可用经典法求解齐次解+特解(零初始值)或者卷积积分法求解(零初始值)。

小马哥 Tips：时域求解，确实会有少数学校要求，比如山东科技，天津工业，以及 23 年考察到极致的宁波大学！所以还是需要大家掌握的！

3.1.2 微分方程的建立

(1)各方框图的含义

#	种类	图形
1	加法器： $r(t)=e_1(t)+e_2(t)$	
2	标量乘法器： $r(t)=Ae(t)$	 
3	微分器： $r(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$	

4	积分器： $r(t)=\int_{-\infty}^{t} e(t)\,dt$	

小马哥 Tips：我们画图一般都是积分器s^{-1}来画！

(2)【连续域】微分方程的齐次解

#	特征根/自由频率/自然频率/固有频率	齐次解/自由响应/自然响应/固有响应
1	单实根	$e^{\lambda t}$
2	r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\ldots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
3	一对共轭复根 $\lambda_{1,\ 2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或$A\cos(\beta t-\theta)$ 其中$Ae^{j\theta}=C+Dj$
4	r重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t+\theta_{r-1})$ $+A_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t+\theta_{r-2})$ $+\ldots+A_0\cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

小马哥 Tips：这是高数内容，信号也就这么多了，一般出现在设零输入响应的形式上。

(3)【连续域】微分方程的特解

#	激励$f(t)$	特解$y_p(t)$/强迫响应/受迫响应
1	E(常数)	$r_p(t)=B$
2	t^m	$P_mt^m+P_{m-1}t^{m-1}+\ldots+P_1t+P_0$ (所有的特征根均不等于 0) $t^r[P_mt^m+P_{m-1}t^{m-1}+\ldots+P_1t+P_0]$ (有r重等于 0 的特征根)
3	$e^{\alpha t}$	若α不是特征根，$r_c(t)=Be^{\alpha t}$

		若α是特征单根，$r_c(t)=tB_0e^{\alpha t}$ 若α是特征k重根，$r_c(t)=t^kB_0e^{\alpha t}$ 此处和高数本质上是相同的。因为齐次解是通用的形式。
4	$sin(\beta t)$ $cos(\beta t)$	$B_1cos(\beta t)+B_2sin(\beta t)$
5	$t^pe^{\alpha t}sin(\beta t)$ $t^pe^{\alpha t}cos(\beta t)$	$(B_1t^p+B_2t^{p-1}+\ldots+B_{P+1})e^{\alpha t}cos(\beta t)+(D_1t^p+D_2t^{p-1}+\ldots+D_{P+1})e^{\alpha t}sin(\beta t)$

小马哥 Tips：**高数内容，特解用于时域求解强迫响应。【注意】冲激函数不存在特解**

3.1.3 连续信号零输入响应与零状态响应

#	类别	含义
1	零输入响应$r_{zi}(t)$	对齐次方程求得齐次解 $$r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$$ 由初始状态$r(0_-)$，$r'(0_-)$，…，$r^{(n-1)}(0_-)$定出系数$A_{zik}(k=1，2，\cdots，n)$，得到零输入响应$r_{zi}(t)$。（零输入响应满足线性） 小马哥 Tips：**无特殊要求，都用时域求零输入。**
2	零状态响应$r_{zs}(t)$	$$r_{zs}(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}}_{齐次解}+\underbrace{r_p(t)}_{特解}$$ 不同的是由初始状态$r(0_-)$等于零条件下定系数A_{zsk}，$r(0_+)$，$r'(0_+)$，…，$r^{(n-1)}(0_+)$，初始值是否为零，要看起始点是否有跳变。（零状态响应满足线性） 小马哥 Tips：**无特殊要求，都用变换域求零**

		状态。时域解法仅供了解。个别学校有考察。知道零状态响应的形式等于齐次解的形式加上特解即可。
3	全响应=零输入响应+零状态响应	$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{a_k t}}_{零输入响应}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{a_k t}+r_p(t)}_{零状态响应}$

手机扫码观看/分享

【讲解】系统响应之间的关系

3.1.4 起始点的跳变

当已知$t=0_-$的初始状态时，初始值不一定等于初始状态值，也就是说起始点可能有跳变。在求解系统的完全响应时，要用到有关的三个量如下。

#	表达式	含义
1	$r^{(k)}(0_-)$	初始状态决定零输入响应，其中$r^{(k)}(0_-)=r_{zi}^{(k)}(0_-)$
2	$r^{(k)}(0_+)$	初始值，它决定完全响应
3	$r_{zs}^{(k)}(0_+)$	跳变量；初始值与初始状态的差值 $r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0_-)=r_{zs}^{(k)}(0_+)$ 当初始状态为零时，它就是零状态响应的初始值。分别利用$r_{zs}^{(k)}(0_+)$，$r^{(k)}(0_+)$求零状态响应和完全响应。

小马哥 Tips：**此处用冲激函数待定系数匹配法，求解跳变量的值。**

手机扫码观看/分享

【讲解】信号中的初始状态和跳变理解

手机扫码观看/分享

【讲解】冲激函数待定系数匹配法

3.1.5 单位冲激响应$h(t)$

(1)定义

单位冲激响应：系统在单位冲激信号$\delta(t)$激励下产生的零状态响应。

(注：阶跃响应：系统在单位阶跃信号$u(t)$激励下产生的零状态响应)

(2)由$h(t)$判断系统特性

因果性：

$$h(t) = h(t)u(t)$$

线性时不变系统的稳定性充要条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M$$

小马哥 Tips：**线性时不变系统的稳定性充要条件，可能出成简答题和选择题。**

3.1.6 连续信号卷积积分及其性质

#	基本性质	内容
1	卷积的定义	$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$
2	交换律	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
3	结合律	$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_2(t)]$
4	分配律	$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$
5	时移性质	若$x_1(t) * x_2(t) = s(t)$，则$x_1(t) * x_2(t-\tau) = s(t-\tau)$
6	微分性质	$\frac{dx_1(t)}{dt} * x_2(t) = \frac{d}{dt}[x_1(t) * x_2(t)]$
7	积分性质	$\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau * x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} [x_1(\tau) * x_2(\tau)]d\tau$

8	与冲激、阶跃函数的卷积	$x(t)*\delta(t)=x(t)$ $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$ $x(t)*\delta(t-t_1)=\delta(t-t_1)*x(t)=x(t-t_1)$ $\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$ $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_2)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$ $\boldsymbol{x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau}$
9	与冲激偶函数的卷积	$x(t)*\delta'(t)=x'(t)$ $x(t)*\delta^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)$ $x(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=x^{(k)}(t-t_0)$
10	面积性质	$A_f=A_{f_1}A_{f_2}$，$A_f=f(t)$的面积 $A_{f_1}=f_1(t)$面积，$A_{f_2}=f_2(t)$的面积
11	重心性质	$K_f=K_{f_1}+K_{f_2}$，$K_f=\frac{m_f}{A_f}$ $m_f=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)dt$

小马哥 Tips：卷积的性质个人认为不是特别重要，因为碰到的问题都可以直接用 s 域解决。

3.1.7 【连续域】常见信号卷积

#	常见卷积式
1	$\boldsymbol{u(t)*u(t)=tu(t)}$ 推：$u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t 1d\tau=tu(t)$
2	$\boldsymbol{tu(t)*u(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)}$ 推：$tu(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t\tau d\tau=\frac{1}{2}t^2u(t)$
3	$e^{-at}u(t)*u(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau=\frac{[1-e^{-at}]}{a}u(t)$

4	$\boldsymbol{e^{-at}u(t)*e^{-bt}u(t)=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}u(t)(a\neq b)}$ $e^{-2t}u(t)*e^{-t}u(t)=\frac{e^{-2t}-e^{-t}}{1-2}u(t)=-(e^{-2t}-e^{-t})u(t)$ $e^{-2t}u(t)*e^{-3t}u(t)=\frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{3-2}u(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$
5	$\boldsymbol{e^{-at}u(t)*e^{-bt}u(t)=te^{-at}u(t)=te^{-bt}u(t)(a=b)}$ $e^{-t}u(t)*e^{-t}u(t)=\int_0^t e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau=te^{-t}u(t)$
6	$\boldsymbol{\sin(\pi t)u(t)*u(t)=\int_0^t \sin(\pi\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}[1-\cos(\pi t)]u(t)}$
7	$P*e^{-at}u(t)=\int_0^{\infty}Pe^{-a\tau}d\tau=P\left[-\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big\|_0^{\infty}\right]=\frac{P}{a}$

小马哥 Tips：卷积常见时域结果我觉得不用背，确实有一些学校要求时域求解卷积，但是这些完全可以用 s 域在草纸上解决，再会到试卷写答案，一样是满分。其中最后一个和常数卷积，可以看成 s 域特征输入。

3.1.8 两个时限信号卷积（矩形卷积重要结论）

①两时限信号卷积，卷积后信号宽度为[小+小，大+大]

②两个相同长度矩形的卷积会得到一个三角形，**三角形的底为两个矩形宽度之和**，三角形的高为**两个矩形的高的乘积和最小矩形的宽的三者乘积**。

③这两个不相同长度矩形的卷积会得到一个梯形，**梯形的下底为两个矩形宽度之和**，**梯形的上底为两个矩形宽度之差**，梯形的高为**两个矩形的高的乘积和最小矩形的宽的三者乘积。**

小马哥 Tips：必须背的滚瓜烂熟，必考内容。

手机扫码观看/分享

【讲解】两个矩形卷积

3.2 离散时间系统的时域分析

3.2.1 时域求解系统响应方法

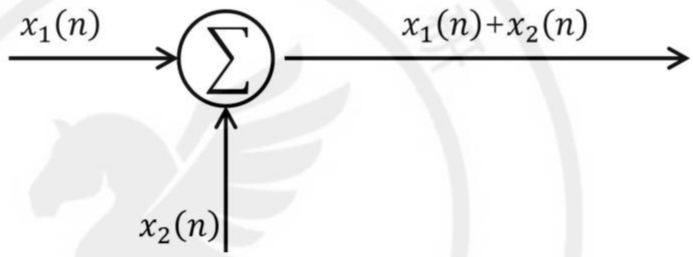
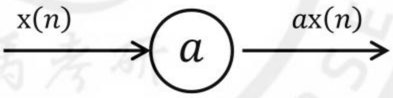
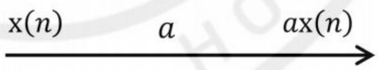
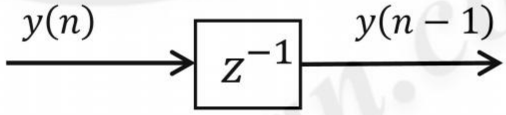
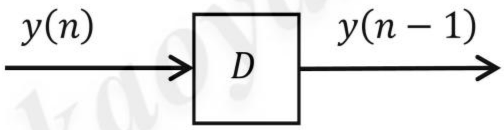
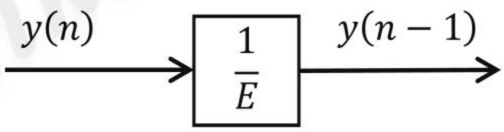
①迭代法：常用迭代法求初始条件。

②经典法：求齐次解和特解，定初始条件，求待定系数。

③双零法：对零输入响应用经典法求齐次方程的解；对零状态响应用卷积和法。

3.2.2 差分方程的建立

(1)各方框图的含义

#	类别	图形
1	加法器	
2	标量乘法器	
		
3	延时器	
		
		

(2)【离散域】差分方程的齐次解

#	特征根	齐次解
1	单实根λ_i	$C_i\lambda_i^k$
2	r重实根λ_i	$(C_1k^{r-1}+C_2k^{r-2}+\cdots+C_{r-1}k+C_r)\lambda_i^k$
3	一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\rho e^{\pm j\Omega}$	$\rho^k\left[C_1cos\,(k\Omega)+C_1sin\,(k\Omega)\right]$或$A\rho^kcos\,(k\Omega-\varphi)$
4	r重共轭复根 $\lambda_{1,2}=\rho e^{\pm j\Omega}$	$\rho^k\left[C_{r-1}cos\,(k\Omega-\varphi_{r-1})+C_{r-2}cos\,(k\Omega-\varphi_{r-2})\right.$ $+\cdots+C_1cos\,(k\Omega-\varphi_1)$ $\left.+C_0cos\,(k\Omega-\varphi_0)\right]$

(3)【离散域】差分方程的特解

#	激励$\boldsymbol{e(k)}$	特解$\boldsymbol{y_p(k)}$
1	E(常数)	P(常数)
2	k^m	$P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\ldots+P_1k+P_0$ (所有的特征根均不等于 0) $k^r[P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\ldots+P_1k+P_0]$ (有r重等于 0 的特征根)
3	a^k	Pa^k (α不等于特征根) $(P_0+P_1k)a^k$ (α等于特征单根) $(P_rk^r+P_{r-1}k^{r-1}+\ldots+P_1k+P_0)a^k$ (α等于r重特征根)
4	$cos\,(k\Omega-\varphi_0)$	$P_1cos\,(k\Omega)+P_2sin\,(k\Omega)$或$Bcos\,(k\Omega-\theta)$
5	$a^kcos\,(k\Omega-\varphi_0)$	$a^k[P_1cos\,(k\Omega)+P_2sin\,(k\Omega)]$或$Ba^kcos\,(k\Omega-\theta)$

小马哥 Tips：**高数内容，齐次解特解，需要掌握。第 2，3 个比较常用。**

3.2.3 离散信号零输入响应与零状态响应

#	类别	含义
1	零输入响应$y_{zi}(n)$	对齐次方程求得齐次解 $$y_{zi}(n)=\sum_{i=1}^{k}C_{zii}(\alpha_i)^n$$ 由初始值⋯，$y(-2)$，$y(-1)$定出系数$C_{zii}(i=1，2，\cdots，k)$，得到零输入响应$y_{zi}(n)$。零输入响应满足线性。 小马哥 Tips：**和连续一样，时域求输入，变换域求零状态。**
2	零状态响应$y_{zs}(n)$	$y_{zs}(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}C_{zsi}(\alpha_i)^n}_{齐次解}+\underbrace{y_p(n)}_{特解}$ 不同的是由初始值⋯，$y(-2)$，$y(-1)$等于零定系数C_{zsi}，零状态响应满足叠加特性。
3	全响应：等于零输入响应与零状态响应之和	$y(n)=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}C_{zii}(\alpha_i)^n}_{零输入响应}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}C_{zsi}(\alpha_i)^n+y_p(n)}_{零状态响应}$

3.2.4 离散时间系统的单位样值响应$\boldsymbol{h(n)}$

(1)定义

单位样值响应：系统在单位样值信号$\delta(n)$激励下产生的零状态响应

(2)求$h(n)$的方法

$$\begin{cases}\text{迭代法: 一般不能直接得到 } h(n) \text{ 的闭式。}\\ \text{经典法}\begin{cases}\text{可由迭代法定初始值} \rightarrow \text{定待定系数。}\\ \text{把单位样值激励等效为起始条件} \rightarrow \text{求解齐次方程。}\end{cases}\\ \text{齐次解法: 求自由项为 } \delta(n) \text{ 的响应 } \hat{h}(n) \rightarrow \text{ 据线性时不变系统的性质求出 } h(n)\text{。}\end{cases}$$

(3)由$h(n)$判断系统特性

$$\begin{cases} \text{因果性：} h(n) = h(n)u(n) \\ \text{稳定性：} \sum|h(n)| \le M \end{cases}$$

小马哥 Tips： **类比连续即可。**

3.2.5 离散信号的卷积和及其性质

#	基本性质	表达式
1	定义	$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$ $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[n-m]x_2[m]$
2	交换律	$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
3	结合律	$\{x_1[n] * x_2[n]\} * x_3[n] = x_1[n] * \{x_2[n] * x_3[n]\}$
4	分配律	$x_1[n] * \{x_2[n] + x_3[n]\} = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$
5	位移特性	若$x_1[n] * x_2[n] = s[n]$， 则$x_1[n] * x_2[n-m] = s[n-m]$
6	差分特性	$\nabla x_1[n] * x_2[n] = \nabla\{x_1[n] * x_2[n]\}$
7	求和特性	$\sum_{m=-\infty}^{n} x_1[m] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{n}\{x_1[m] * x_2[m]\}$
8	差分、求和特性的推论	$x_1[n] * x_2[n] = \nabla x_1[n] * \sum_{m=-\infty}^{n} x_2[m]$
9	与单位样值的卷积	$x(n) * \delta(n) = x(n)$ $x(n) * \delta(n-m) = x(n-m)$

手机扫码观看/分享

【讲解】常见卷积运算

3.2.6 【离散域】常见信号卷积和

#	常见卷积和
1	$u(n) * u(n) = (n+1)u(n)$
2	$a^n u(n) * u(n) = \sum_{m=0}^{n} a^m u(n) = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)(a \neq 1)$
3	$a^n u(n) * b^n u(n) = \sum_{m=0}^{n} a^m b^{n-m} u(n) = \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} u(n)(a \neq b)$
4	$a^n u(n) * b^n u(n) = (n+1)a^n u(n) = (n+1)b^n u(n)(a = b)$

小马哥 Tips：没精力可以不背，在z域一样可以求出结果。另外有限长序列求卷积的方法：错位相乘不进位法，必须掌握，这里给大家视频二维码学习：

手机扫码观看/分享

【讲解】错位相乘不进位法

3.2.7 系统六性的判断

系统的基本特性由其输入$x(t)$, $x(n)$和输出$y(t)$,$y(n)$之间的关系来判断，具体特性如下。

#	基本性质	内容
1	线性 同时满足齐次性和叠加性。	先系统后线性等于先线性后系统。 $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \to a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \to a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$
2	时不变性	先系统后时移等于先时移后系统。 $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$ $x[n-n_0] \to y[n-n_0]$
3	因果性	系统在任何时刻的输出只和系统当前时刻和过去时刻的输入有关，与未来时刻的输入无关。
4	稳定性	满足 BIBO 准则：系统在输入有界时，其输出也有界

5	可逆性	系统在不同的输入时具有不同的输出。
6	记忆性	输入输出同时变化，则为无记忆。

小马哥 Tips：重点考研必考内容，多做几道题就会了。其中积分、微分形式的性质判断比较特殊，扫第三个码补课。

手机扫码观看/分享

【讲解】系统六性判断

手机扫码观看/分享

【讲解】离散域系统性质判断实战

手机扫码观看/分享

【讲解】积分形式、微分形式的性质判断

3.3 线性时不变系统的基本特性

线性时不变系统的基本特性可由其冲激响应$h(t)$、$h[n]$来判断，具体特性如下。

#	基本性质	内容
1	因果性	当$t<0$时，$h(t)=0$；当$n<0$时，$h[n]=0$
2	稳定性	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert h(t)\rvert dt<\infty$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert h[n]\rvert<\infty$ $h_1(t)$、$h_1[n]$为可逆系统的冲激响应 $h_2(t)$、$h_2[n]$为补偿系统的冲激响应
3	可逆性	$h_1(t)*h_2(t)=\delta(t)$ $h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]$
4	卷积特性	若$y(t)$、$y[n]$是线性时不变系统的零状态响应 则$y(t)=x(t)*h(t)$，$y[n]=x[n]*h[n]$

第四章 连续时间信号与系统的频域分析

4.1 傅里叶级数

4.1.1 周期信号的傅里叶级数表示

#	形式	表达式	傅里叶级数系数
1	三角函数形式	$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\,(n\omega_1 t)+b_n sin\,(n\omega_1 t)\right]$ $(n=1，2，3\cdots)$	$\boldsymbol{a_0=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}f(t)dt}$
2	指数函数形式	$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$ $(n=0，\pm1，\pm2\cdots)$	$F_0=a_0$ $F_n=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$
3	纯余弦形式	$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n cos\,(n\omega_1 t+\varphi_n)$	$\begin{cases}c_0=a_0\\ c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n=-arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\end{cases}$

小马哥 Tips：注意，此处不同教材，比如郑君里和吴大正就不同，对a_0的定义不同。扫码补课；注意指数形式更常用，需要熟练背诵。其中F_n傅里叶级数的系数一般利用和傅里叶之间的关系来求解。$F_n=\frac{1}{T}F_0(\omega)$；**注意纯余弦形式一般被应用在画单边幅度谱和单边相位谱上面。**$c_0=a_0$为直流分量，$c_n\sim n\omega_1$为单边幅度谱，$\varphi_n\sim n\omega_1$为单边相位谱；

手机扫码观看/分享

【讲解】不同教材对a_0的定义

余弦分量a_n

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{T_1}f(t)cos\,(n\omega_1 t)dt$$

正弦分量b_n

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{T_1} f(t)sin\,(n\omega_1 t)dt$$

4.1.2 单边谱和双边谱的画法

(1)单边谱的画法：

$C_n > 0$，纯余弦形式，一个频率一个余弦。

$$C_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

C_n、F_n、φ_n都是$n\omega_1$的函数，其中$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$

幅度谱：

$$C_n \rightarrow n\omega_1(\text{单边幅度谱})$$

相位谱：

$$\varphi_n \rightarrow n\omega_1(\text{单边相位谱})$$

(2)双边谱的画法：

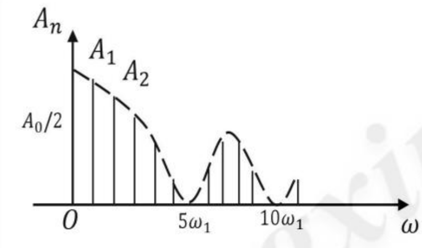
C_n、F_n、φ_n都是$n\omega_1$的函数，其中$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$

幅度谱：

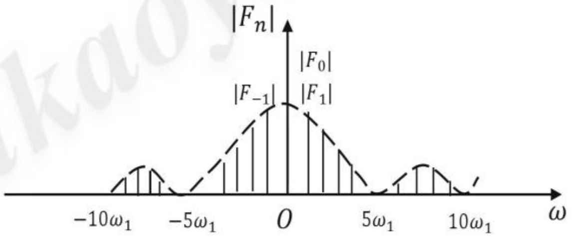
$$F_n\text{的模值}|F_n| \rightarrow n\omega_1(\text{双边幅度谱})$$

相位谱：

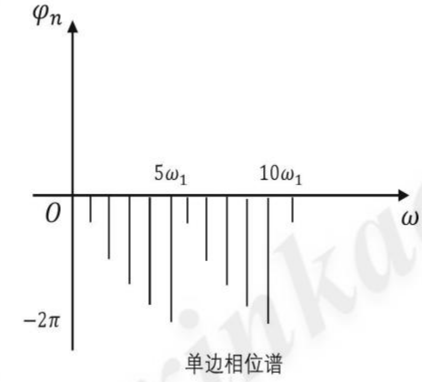
$$F_n\text{的相位}\varphi_n \rightarrow n\omega_1(\text{双边相位谱})$$

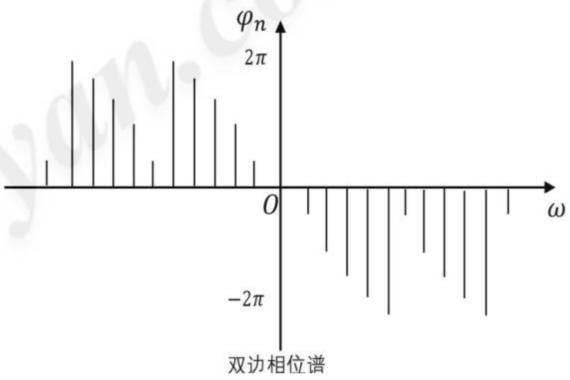


单边幅度谱



双边幅度谱





小马哥 Tips：

单边双边取决于是哪种展开形式：

若为c_n的形式，则为单边谱。

若为F_n的形式，则为双边谱。

手机扫码观看/分享

【讲解】单边谱和双边谱的画法及相互转换

4.1.3 连续傅里叶级数的性质

注意： 除了奥本以外的其他教材一般用F_n来表示傅里叶级数，奥本海姆教材用a_k来表示傅里叶级数。因为基本只有奥本教材考这个知识点，比如西南交大、川大、中海洋。所以我们这里用奥本的定义假设$x(t)$的傅里叶级数为a_k。$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$。

#	性质	表达式
1	线性	$Ax(t)+By(t)\leftrightarrow Aa_k+Bb_k$
2	时域共轭性	$x^*(t)\leftrightarrow a_{-k}^*$
3	调制特性	$x(t)\cos\omega_1 t\leftrightarrow\frac{1}{2}(a_{k+1}+a_{k-1})$ $x(t)\sin\omega_1 t\leftrightarrow\frac{1}{2j}(a_{k-1}-a_{k+1})$
4	反折特性	$x(-t)\leftrightarrow a_{-k}$

5	时移特性	$x(t-t_0)\leftrightarrow a_k e^{-j\omega_1 t_0}$
6	频移	$e^{jM\omega_0 t}x(t)\leftrightarrow a_{k-M}$
7	时域微分特性	$x^{(k)}(t)\leftrightarrow (jn\omega_1)^k a_k$
8	相乘 $x(t)y(t)$ **(中科院 23 真题)**	$x(t)y(t)\leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
9	周期卷积	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\leftrightarrow Ta_k b_k$
10	周期信号的功率	$P=\overline{x^2(t)}=\dfrac{1}{T_1}\int_{T1}\|x(t)\|^2\,dt=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\|a_k\|^2$
11	时域尺度	$x(at)$，$a>0\leftrightarrow a_k$
12	实信号的 共轭对称性	$x(t)$为实信号$\leftrightarrow\begin{cases}a_k=a_{-k}^*\\ Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\}\\ Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\}\\ \|a_k\|=\|a_{-k}\|\\ \measuredangle a_k=\measuredangle a_{-k}\end{cases}$
12	实偶信号	$x(t)$为实偶信号$\leftrightarrow a_k$为实偶函数
13	实奇信号	$x(t)$为实奇信号$\leftrightarrow a_k$为虚奇函数
14	实信号的奇偶分解	$\begin{cases}x_e(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)+x(-t)]\leftrightarrow Re\{a_k\}\\ x_0(t)=\dfrac{1}{2}[x(t)-x(-t)]\leftrightarrow jIm\{a_k\}\end{cases}$

小马哥 Tips：

这个知识点只有参考教材为奥本的院校考，西南交大年年考，好好看。但是这个其实有跳过去的快捷方式！卖个小关子 hhh，课上讲（狗头

手机扫码观看/分享

【讲解】类比 DFS 的性质

4.1.4 周期信号波形对称性与傅里叶级数系数的关系

<table>
<tr><th>对称性</th><th>傅里叶级数中所含分量</th><th>余弦分量系数a_n</th><th>正弦分量系数b_n</th></tr>
<tr><td>纵轴对称
(偶函数)
$f(t)=f(-t)$</td><td>只有余弦项，可能含直流</td><td>$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>坐标原点对称
(奇函数)
$f(t)=-f(-t)$</td><td>只有正弦项</td><td>0</td><td>$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$</td></tr>
<tr><td>半周期重叠
(偶谐函数)
$f(t)=f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$</td><td>只有偶次谐波，可能含直流</td><td rowspan="2">$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$</td><td rowspan="2">$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$</td></tr>
<tr><td>半周期镜像
(奇谐函数)
$f(t)=-f\left(t\pm\frac{T_1}{2}\right)$</td><td>只有奇次谐波</td></tr>
</table>

注：**此表源于吕玉琴考研指导**，其中$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$，$f(t)$为实数函数。

小马哥 Tips：

这个一般出现在选择题内，就是图像给个信号判断含有哪些谐波分量，考察不多。背下来即可。

4.1.5 傅里叶有限级数与最小方均误差

若取傅里叶级数的前$(2N+1)$项来逼近周期函数$f(t)$，则有限项傅里叶级数为

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n cos(n\omega_1 t) + b_n sin(n\omega_1 t)]$$

这样用$S_N(t)$逼近$f(t)$引起的误差函数为

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$$

方均误差为

$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - \left[a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n{}^2 + b_n{}^2)\right]$$

4.2 非周期信号的频域分析

4.2.1 傅里叶变换的定义

(1)任意非周期信号$f(t)$，**若满足狄利克雷条件，且无穷区间绝对可积**，则可求得其频谱密度函数(简称为频谱函数)为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \ \text{（傅里叶正变换）}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \ \text{（傅里叶逆变换）}$$

小马哥 Tips：

注意即使不满足绝对可积，由于引入了奇异信号，傅里叶变换也可能存在。比如单位阶跃信号不满足绝对可积，但是傅里叶变换存在。

必背常见两个考研考点：

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \left(\text{当 } lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0\right)$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \left(\text{当 } lim_{t\to\pm\infty} F(\omega) = 0\right)$$

(2)傅里叶级数系数和傅里叶变换之间的关系：

$$F_n = \frac{1}{T_0}X(j\omega)\bigg|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{T_0}X(jn\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

4.2.2 傅里叶变换的表示

因$F(\omega)$一般是复数函数，故可表示为

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(\omega)|$与$\varphi(\omega)$分别称为信号$f(t)$的幅度谱与相位谱。

小马哥 Tips：难倒一大批人的奇偶虚实性总结如下：

频谱	若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$为实信号		若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$为虚信号	
$F(\omega)$	偶对称	奇对称	偶对称	奇对称
	实偶	虚奇	虚偶	实奇
$R(\omega)$	偶对称		奇对称	
$X(\omega)$	奇对称		偶对称	
$\|F(\omega)\|$	偶对称		偶对称	
$\varphi(\omega)$	奇对称		$\pi-\varphi(-\omega)$	

小马哥黄金铁律：一个域的共轭对称部分，对应另外一个域的实部。一个域的共轭反对称部分，对应另外一个域的 j 乘虚部。

手机扫码观看/分享

【讲解】信号的奇偶虚实性推导

4.2.3 傅里叶变换存在的条件(狄利克雷条件)

狄利克雷条件也是信号存在傅里叶变换的充分条件，与傅里叶级数不同之处仅仅在于时间范围由一个周期变成无限的区间，即要求在无限的区间内满足绝对可积条件，即要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$$

4.2.4 典型信号的傅里叶变换对

#	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(\omega)}$
1	单位冲激信号$\delta(t)$	1
2	常数信号 1	$2\pi\delta(\omega)$
3	单位阶跃信号$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
4	$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
5	$\frac{1}{\pi t}$ **(非常常见)**	$-jsgn\,(\omega)$
6	单边指数信号$e^{-\alpha t}u(t)$ (a 为大于零的实数)	$\frac{1}{j\omega+a}$
7	门函数$EG_\tau(t)$ G为$Gate$的缩写，代表门函数	$E\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$
8	$Etri_\tau(t)$ tri为$triangle$的缩写，代表三角形。	$\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$
9	$E\tau sa\left(\frac{t\tau}{2}\right)$	$2\pi EG_\tau(\omega)$
10	$\frac{E\tau}{2}Sa^2\left(\frac{t\tau}{4}\right)$	$2\pi Etri_\tau(\omega)$
11	抽样函数信号 $Sa(\omega_0 t)=\frac{sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$	$\frac{\pi}{\omega_0}G_{2\omega_0}(\omega)$

12	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
13	周期冲激序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-nT_s)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\frac{2\pi}{T})$ $\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\frac{\pi}{T})$，$n$为奇数
14	余弦信号 $\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
15	正弦信号 $\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
16	斜变信号 $tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$
17	单边正弦信号 $\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{j\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]-\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$
18	单边余弦信号 $\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]-j\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$
19	周期信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_1(jn\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$
20	抽样信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\big(j(\omega-n\omega_s)\big)$
21	$Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$	$\sqrt{\pi}E\tau e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$
22	$\frac{1}{2}[\delta(t-1)+\delta(t+1)]$	$\cos(\omega)$
23	t	$j2\pi\delta'(\omega)$
24	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$

小马哥 Tips：这些你们要反复背一年，背不下来，立即推！

手机扫码观看/分享

【讲解】常见信号的傅里叶变换

4.3 傅里叶变换的主要性质

#	性质名称	时域$f(t)$	频域$F(\omega)$
1	唯一性	$f(t)$	$F(\omega)$
2	线性	$\sum_{i=1}^{n} A_i f_i(t)$ A_i为常数，n为正整数	$\sum_{i=1}^{n} A_i F_i(\omega)$
3	对偶性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
4	尺度变换特性	$f(at)$ (a为非零实常数)	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
		$f(-t)$	$F(-\omega)$
5	时移性	$f(t-t_0)$ (t_0为实常数)	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
		$f(at-t_0)$ (a，t_0为实常数)	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$
6	频移	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$ (ω_0为实常数)	$F(\omega \mp \omega_0)$
		$f(t)\cos(\omega_0 t)$ **(调制定理)** **非常重要！**	$\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)$

		$f(t)sin\,(\omega_0 t)$ (调制定理)	$j\left[\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)-\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)\right]$
7	时域微分 **要求：** $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t<\infty$	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
		$\frac{d^kf(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^kF(\omega)$
8	时域积分	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]F(\omega)$
9	频域微分 (时域乘t)	$(-jt)f(t)$	$\frac{dF(\omega)}{d\omega}$
		$(-jt)^kf(t)$	$\frac{d^kF(\omega)}{d\omega^k}$
10	频域积分	$\left[\pi f(0)\delta(t)-\frac{1}{jt}f(t)\right]$	$\int_{-\infty}^{\omega}F(jx)dx$
11	共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
12	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
13	频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$
14	时域抽样	$\sum_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-nT_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-\frac{2\pi}{T_s}n\right)$
15	交替周期冲激的抽样 (难题必备)	$f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-nT_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-\frac{n\pi}{T_s}\right)$，$n$为奇数
16	频域抽样	$\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(t-\frac{2n\pi}{\omega_s}\right)$	$F(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$
17	自相关	$R(\tau)$	$\lvert F(\omega)\rvert^2$
18	互相关	$R_{21}(\tau)$	$F_2(\omega)\cdot F_1^*(\omega)$

		$R_{12}(\tau)$	$F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega)$
19	帕塞瓦尔定理(能量定理)	$E=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2\,d\omega$	
20	零积性	$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\ (条件:lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0)$ $f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega\ (条件:lim_{\omega\to\pm\infty}F(\omega)=0)$	

小马哥 Tips：必须熟练掌握，每一个都是经典性质！

手机扫码观看/分享

【讲解】傅里叶变换的常见性质

4.4 周期信号的傅里叶变换

(1)定义

$$f(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

其中

$$F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,\mathrm{dt}$$

$$F_n=\frac{1}{T}F_0(\omega)\bigg|_{\omega=n\omega_1}$$

其中$F_0(\omega)$为主周期信号的傅里叶变换或$F(j\omega)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_1(jn\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$

(2)周期信号$f(t)$的傅里叶变换

#	$f(t)(-\infty<t<\infty)$	$F(\omega)$
1	$cos\,(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
2	$sin\,(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
3	$\delta_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$	$\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1),\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$
4	一般周期信号 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$ 其中 $F_n=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt$ 或$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big\vert_{\omega=n\omega_1}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$ $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$

小马哥 Tips：必须熟练掌握！

手机扫码观看/分享

【讲解】周期信号的傅里叶变换

4.5 功率信号与能量信号

#	功率信号	能量信号
1	信号在时间区间$(-\infty,\ \infty)$内的能量为∞，但平均功率为有限值。 周期信号、阶跃信号、符号函数等为功率信号。	信号在时间区间$(-\infty,\ \infty)$内的能量为有限制，但平均功率为∞。
2	时域公式:	时域公式:

	$P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}\lvert f(t)\rvert^{2}\,dt$	$E=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^{2}\,dt$
3	频域公式(对于周期信号)； $P=\overline{f^{2}(t)}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert f(t)\rvert^{2}dt$ $=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ $=c_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$ $=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert F_n\rvert^{2}$ 即平均功率P等于频域中直流分量与各次谐波分量平均功率之和。	频域公式： $E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^{2}\,d\omega$ $=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^{2}\,d\omega$
4	功率谱密度 $\phi(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{\lvert F_T(\omega)\rvert^{2}}{T}$ 其中$F_T(\omega)$为功率信号$f(t)$的截断函数$f_T(t)$的傅里叶变换。	能量谱密度 令$G(\omega)=\lvert F(\omega)\rvert^{2}$，$G(\omega)$的单位为$J/rad$，则 $E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)d\omega$ $G(\omega)$称为能量信号的能量频谱密度，简称能量谱。它描述了单位频带内信号的能量随ω分布的规律。

小马哥 Tips：考研考察频率较高，需要背诵！

手机扫码观看/分享

【讲解】从单边谱双边谱求能量和功率

4.6 抽样信号的傅里叶变换与抽样定理

4.6.1 信号最高频率

(1)信号最高频率（卷小和大积相加）

若$h_1(t)$截止频率为ω_1，$h_2(t)$截止频率为ω_2，$a>1$。

①$h_1(t)*h_2(t)$的最高频率为$\boldsymbol{\omega_m}=\{\omega_1,\ \omega_2\}_{min}$

②$h_1(t)+h_2(t)$的最高频率为$\boldsymbol{\omega_m}=\{\omega_1，\omega_2\}_{max}$

③$h_1(t)\cdot h_2(t)$的最高频率为$\boldsymbol{\omega_m}=(\omega_1+\omega_2)$

④$h_1(at)$的最高频率为$\boldsymbol{\omega_m}=a\omega_1$

⑤$h_1(\frac{t}{a})$的最高频率为$\boldsymbol{\omega_m}=\frac{\omega_1}{a}$

小马哥 Tips：必须熟练掌握，考研必考！

手机扫码观看/分享

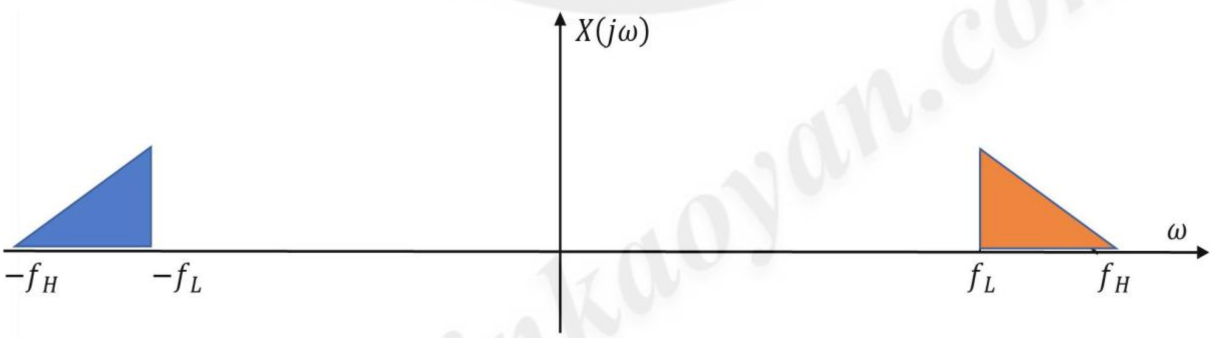
【讲解】卷小和大积相加实战讲解

(2)奈奎斯特（低通）采样定理

通常把满足抽样定理要求的最低抽样频率$\omega_s=2\omega_m$称为奈奎斯特频率，把最大允许的抽样间隔$T_s=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2f_m}$称为奈奎斯特间隔。

小马哥 Tips：奥本海姆定义的奈奎斯特频率为信号不发生混叠时的最高频率，定义奈奎斯特率为信号最高频率的二倍。国内教材一般没有区分这两个概念，统一为信号最高频率的二倍。所以此题大家按照自己院校教材定义处理即可

(3)奈奎斯特（带通）采样定理



其中带通信号如图所示。

①：假设在对称的截至频率（$2f_H$）区间内，能容纳的完整的采样周期的个数为m个。

结论①综上：

$$m \le \frac{2f_H}{2(f_H - f_L)} = \frac{f_H}{(f_H - f_L)}$$

$$\frac{2f_H}{m} \le f_s \le \frac{2f_L}{m-1}$$

②：假设在对称的截至频率（$2f_L$）区间内，能容纳的完整的采样周期的个数为m个。

结论②综上：

$$m \le \frac{2f_L}{2(f_H - f_L)}$$

$$m+1 = \frac{f_H}{(f_H - f_L)}$$

将上面公式所有的m都变成$m+1$

$$\frac{2f_H}{m+1} \le f_s \le \frac{2f_L}{m}$$

小马哥 Tips：23 年哈工程、东南等院校考察此知识点，需要会！我在 24 小马哥押题卷第 3 套有讲过推导，去补补课。

手机扫码观看/分享

【讲解】带通抽样定理推导

4.6.2 抽样信号$f_s(t)$及其频谱

设被抽样的信号为$f(t)$，抽样脉冲为$p(t)$，$f_s(t)$称为抽样信号。T_s为抽样间隔，$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$称为抽样角频率。

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$

#	类别	定义
1	**矩形脉冲抽样**	当$p(t)$为矩形脉冲序列时，称为矩形脉冲抽样。

		$$f_s(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_r(t-nT_s)$$ $$F_s(\omega)=\frac{E_\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F(\omega-n\omega_s)$$
2	**理想抽样**	当$p(t)$为单位冲激序列时，称为理想抽样。 $$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$ $$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$
3	**理想抽样信号的内插**	$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)Sa\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)\right]$$

小马哥 Tips：**一般出现在题目中，以调制框图的形式给出，让画幅频特性和相频特性。**

其中，T_s为抽样周期，$Sa\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)$为理想低通的冲激响应。

4.6.3 抽样定理

(1)抽样信号的傅里叶变换

$$f_s(t)=f(t)\cdot p(t)\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_nF(\omega-n\omega_s)$$

其中

$$p_n=\frac{1}{T_s}\int_{T_s}p(t)e^{-jn\omega_s t}\,\mathrm{dt}$$

或

$$f_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\big(j(\omega-n\omega_s)\big)$$

(2)抽样冲激串

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

其中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

(3)抽样定理的条件

①被抽样的信号$x(t)$必须是最高频率为ω_m的带限信号；

②抽样频率ω_s必须大于等于两倍的ω_m，即$\omega_s \geq 2\omega_m$。

小马哥 Tips：熟练掌握。

手机扫码观看/分享

【讲解】抽样定理推导

4.7 离散时间时域分析

4.7.1 离散时间傅里叶级数(DFS)的定义

若$x[n]$为周期信号，周期为N，则其离散时间傅里叶级数为

$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\omega_0 n}, \ a_k = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

其中$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

小马哥 Tips：注意。这是 SS 和 DSP 的灰色地带，准确来讲属于 DSP 的内容。但是如果在 DSP 内，$\frac{1}{N}$的位置会有变换（如下面公式），这个不同教材的定义不同，大家以自己教材为准。只考信号，一般以上面第一个公式为准。

$$x[n] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\omega_0 n}, \ X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

手机扫码观看/分享

【讲解】离散傅里叶级数 DFS 和连续傅里叶级数 FS

离散时间傅里叶级数的性质

#	性质	周期信号	傅里叶级数系数
		$x(n)$，$y(n)$周期为N，基波频率为 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$	a_k，b_k周期为N
1	线性	$Ax(n)+By(n)$	Aa_k+Bb_k
2	时移	$x(n-n_0)$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
3	频移	$e^{jM(2\pi/N)n}x(t)$	a_{k-M}
4	时域尺度	$x_m(n)=\begin{cases}x(n/m)，若\ n\ 为\ m\ 的倍数\\0，\ else\end{cases}$	$\frac{1}{m}a_k$ (看成周期的，周期为mN)
5	周期卷积	$\sum_{r=<N>}x(r)y(n-r)$	Na_kb_k
6	相乘	$x(n)y(n)$	$\sum_{l=<N>}a_lb_{k-l}$
7	一阶差分	$x(n)-x(n-1)$	$\left(1-e^{-j(2\pi/N)}\right)a_k$
8	求和	$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$ (仅当$a_0=0$才为有限值且为周期的)	$\left(\frac{1}{1-e^{-j(2\pi/N)}}\right)a_k$
9	实信号的共轭对称性	$x(n)$为实信号	$\begin{cases}a_k=a_{-k}^*\\Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\}\\Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\}\\\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert\\\measuredangle a_k=\measuredangle a_{-k}\end{cases}$
10	实偶信号	$x(n)$为实偶信号	a_k为实偶函数
11	实奇信号	$x(n)$为实奇信号	a_k为虚奇函数

12	实信号奇偶分解	$\begin{cases} x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)] \\ x_0(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)] \end{cases}$	$Re\{a_k\}$ $jIm\{a_k\}$
13	卷积性质	$f[n]*g[n]$	Na_kg_k

小马哥 Tips：注意。这是 SS 和 DSP 的灰色地带，准确来讲属于 DSP 的内容。但是如果在 DSP 内，$\frac{1}{N}$的位置会有变换，这个不同教材的定义不同，大家以自己教材为准。只考信号，一般以上面第一个公式为准。

4.7.2 离散时间傅里叶变换(*DTFT*)的定义

(1)正变换:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

(2)逆变换:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,\mathrm{d}\omega$$

(3)傅里叶级数系数(DFS)$X[k]$和傅里叶变换$X(e^{j\omega})$之间的关系

$$X[k]=\frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\Omega=k\omega_0}=\frac{1}{N}X\left(e^{jk\omega_0}\right)$$

小马哥 Tips：注意。第 3 点不考，仅做了解。

(4)常见序列的傅里叶变换对

#	$x(n)$	$F(e^{j\omega})$以 2π 为周期
1	单位冲激信号$\delta(n)$	1
2	单位阶跃序列$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2k\pi)$
3	单边指数序列$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$，$\|a\|<1$
4	常数序列 1	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$，所有 n
5	双边指数序列$a^{\|n\|}$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$
6	斜边衰减信号 $(n+1)a^n u(n)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$，$\|a\|<1$
7	矩形脉冲序列 $u[n+M]-u[n-M-1]$	$\frac{\sin\left[\frac{(2M+1)\omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$
8	抽样函数序列 $\frac{\Omega_c}{\pi}Sa(\omega_c n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[u(\omega+\omega_c-2k\pi)-u(\omega-\omega_c-2k\pi)]$
9	正弦序列 $\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)-\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)]$
10	余弦余弦 $\cos(\omega_0 n)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)+\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)]$
11	正弦指数序列 $e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$
12	周期冲激序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN]$	$\omega_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_0)$

小马哥 Tips：考察 DTFT 的学校，比如华南理工，需要掌握这些内容。

手机扫码观看/分享

【讲解】DTFT 的常见变换对

(5)序列傅里叶变换 DTFT 的主要性质

#	性质	表达式
1	线性	$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{i=1}^{N} a_i X_i(e^{j\omega})$
2	共轭对称性	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$
3	时移特性	$x[n-n_0] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-jn_0\Omega} \cdot X(e^{j\omega})$
4	频移特性	$e^{jn_0\omega} x(n) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
5	时域扩展	$x_{(a)}[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{ja\omega})$
6	差分	$\nabla x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})(1-e^{-j\omega})$
7	求和	$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$
8	频域微分	$nx[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
9	时域卷积:	$x[n] * h[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$
10	频域卷积	$x[n] \cdot z[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Z(e^{j\omega})$
11	帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\pi}^{+\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 \,\mathrm{d}\omega$
12	奇偶虚实性	$\mathcal{F}[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$ $\mathcal{F}[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$ $\mathcal{F}[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$ $\mathcal{F}[x_e(n)] = Re\,[X(e^{j\omega})]$ $\mathcal{F}[x_o(n)] = jIm\,[X(e^{j\omega})]$ $\mathcal{F}[Re\,(x(n))] = X_e(e^{j\omega})$

		$\mathcal{F}[jIm\,(x(n))] = X_o(e^{j\omega})$ $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$ $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$ $X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$

小马哥 Tips：注意一些，愿意考察离散 DTFT 的院校。需要背诵这些。

手机扫码观看/分享

【讲解】DTFT 的常见性质

4.8 线性时不变系统的频率响应

4.8.1 线性时不变系统对复指数信号的响应

若以$e^{j\omega_0 t}$作为激励，则系统的稳态响应为

$$\begin{aligned} T[e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau = e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0) \end{aligned}$$

其中$T[]$表示以[]中的信号作为激励求得的响应。或用傅里叶变换分析法表示

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega_0)$$

$$r(t) = T[e^{j\omega_0 t}] = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

表明系统的响应等于激励$e^{j\omega_0 t}$乘以加权函数$H(j\omega_0)$。复指数信号$e^{j\omega_0 t}$是 LTI 系统特征值为$H(j\omega_0)$的特征函数。

4.8.2 线性时不变系统对傅里叶级数表示式的响应

$$T\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

4.8.3 一般非周期信号经系统的响应

当输入$e(t)$为非周期信号，则

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

$$r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

令

$$R(j\omega)=|R(j\omega)|e^{j\varphi_R(\omega)}$$

$$E(j\omega)=|E(j\omega)|e^{i\varphi_E(\omega)}$$

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi_H(\omega)}$$

则

$$|R(j\omega)|=|E(j\omega)||H(j\omega)|$$

$$\varphi_R(\omega)=\varphi_E(\omega)+\varphi_H(\omega)$$

说明$H(\mathrm{j}\omega)$是一个加权函数，信号经系统传输后，其幅度频谱被$|H(j\omega)|$加权，相位被$\varphi_H(\omega)$修正。幅频特性$|H(j\omega)|$有时也被称为**系统的增益**。

小马哥 Tips：**结合后面的特征输入和正弦稳态大总结一起学习。**

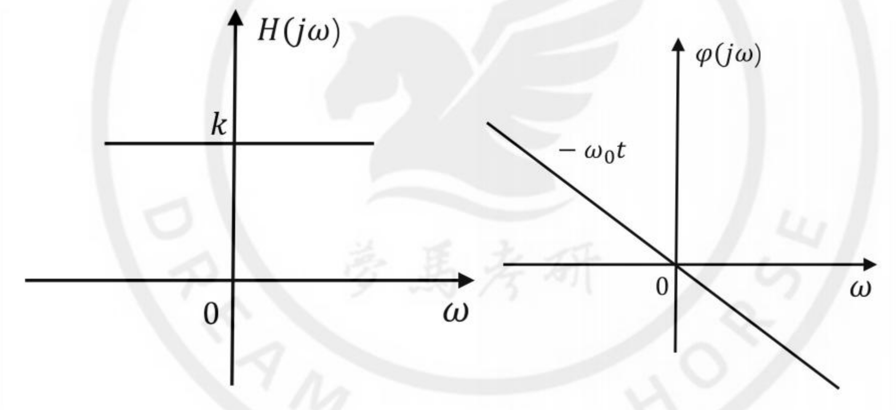
手机扫码观看/分享

【讲解】线性时不变系统频率响应推导

4.9 系统无失真传输条件

#	类别	表达式
1	时域表达式	$r(t)=ke(t-t_0)$
2	单位冲激响应	$h(t)=k\delta(t-t_0)$
3	频域表达式	$R(j\omega)=kE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
4	频率响应	$H(j\omega)=ke^{-j\omega t_0}$
5	幅频特性	$\lvert H(j\omega)\rvert=K$
6	相频响应	$\varphi(\omega)=-\omega t_0$
7	群延迟	$-\dfrac{d}{d\omega}\varphi(\omega)=t_0$

无失真传输系统的幅度和相位特性如图所示。



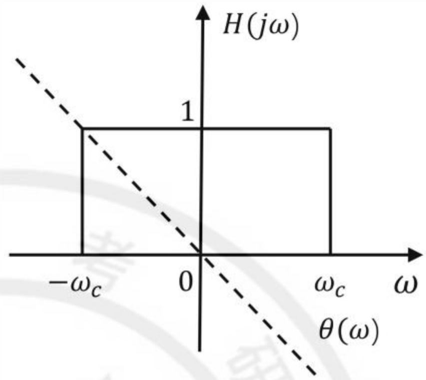
$H(j\omega)$的幅频特性必须是一个**与频率无关的常数**，相位必须是频率的线性函数，也就是相频特性必须是**过原点的直线**。

小马哥 Tips：重要知识点，牢记无失真系统的幅频特性和相频特性，缺一不可！

手机扫码观看/分享

【讲解】线性系统的无失真条件

4.10 理想低通滤波器的特性

#	内容要点	内容
1	频率响应	$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega t_0}, & \lvert\omega\rvert\le\omega_c\\0, & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$
2	频率响应波形	
3	幅频特性	$\lvert H(j\omega)\rvert=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert\leqslant\omega_c\\0, & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$
4	相频特性	$\varphi(j\omega)=\begin{cases}-j\omega t_0, & \lvert\omega\rvert\leqslant\omega_c\\0, & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$
5	冲激响应	$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$
6	阶跃响应	$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_0)}\frac{sinx}{x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$ 其中$Si(y)$称为正弦积分：$Si(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}dx$

小马哥 Tips： 重要知识点，最后一行阶跃响应一般不考！

手机扫码观看/分享

【讲解】理想低通滤波器

4.11 调制解调

(1)正弦幅度调制（调制定理）

时域:

$$y(t) = x(t)cos\,(\omega_0 t)$$

频域:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\{X[j(\omega+\omega_0)] + X[j(\omega-\omega_0)]\}$$

小马哥 Tips：重要知识点，考研必考！

(2)自然抽样的脉冲幅度调制

时域:

$$y(t) = x(t)p(t)$$

其中

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(t-nT_s) - u(t-\tau-nT_s)]$$

频域:

$$Y(j\omega) = \frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)e^{-j\frac{n\omega_s\tau}{2}}X[j(\omega-n\omega_s)]$$

其中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

(3)平顶抽样的脉冲幅度调制

时域:

$$y(t) = x_s(t) * [u(t) - u(t-\tau)]$$

其中

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

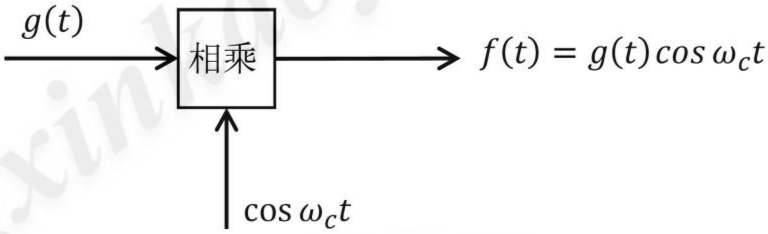
频域:

$$Y(j\omega) = \frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega a/2}X[j(\omega-n\omega_s)]$$

其中

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

例题：抑制载波振幅调制系统框图如图所示。其中$g(t)$称为调制信号，$f(t)$称为已调信号，ω_c称为载波角频率，$\omega_c \gg \omega_m$，ω_m为信号$g(t)$的带宽。



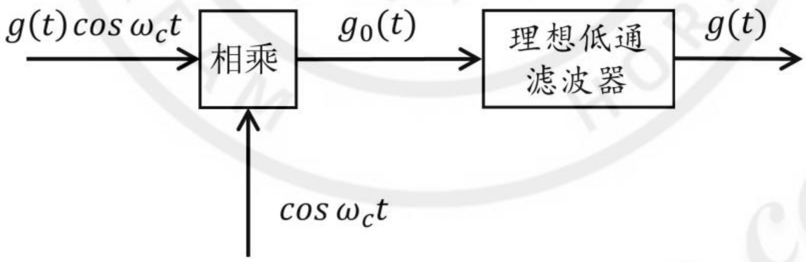
已调信号为

$$f(t) = g(t)cos\,\omega_c t$$

$f(t)$的频谱函数$F(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}G(\omega - \omega_c)$$

同步解调：



$$g_0(t) = [g(t)cos\,\omega_c t]cos\,\omega_c t = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}g(t)cos\,2\omega_c t$$

$g_0(t)$的频谱函数为

$$\mathcal{F}[g_0(t)] = \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}[G(\omega + 2\omega_c) + G(\omega - 2\omega_c)]$$

再利用一个低通滤波器($\omega_m < |\omega| < 2\omega_c - \omega_m$)，滤除在频率为 $2\omega_c$附近的分量，即可取出$g(t)$，完成解调。

抑制载波振幅调制：

$$f(t) = g(t) \cdot c(t)$$

其中

$$c(t) = e^{j(\omega_c t+\theta_c)} \text{ 或 } c(t) = cos\,(\omega_c t + \theta_c)$$

振幅调制(非同步解调)：

$$f(t) = [A + g(t)]cos\,\omega_c t$$

其中

$$A + g(t) > 0$$

小马哥 Tips：无需背诵，一般出在调制解调的大题中！

手机扫码观看/分享

【讲解】调制解调-幅度调制系统

4.12 带通信号经过带通滤波器的常用结论

若两个带通可以表示成低通调制的形式如：

$$e(t) = e_1(t)cos\,(\omega_c t), h(t) = h_1(t)cos\,(\omega_c t)$$

若

$$r_1(t) = e_1(t) * h_1(t)$$

则输出信号为

$$r(t) = \frac{1}{2} r_1(t)cos\,(\omega_c t)$$

小马哥 Tips：这个知识点是必做96题的题目，也是多道23真题考察，不背结论也能通过特征输入做出答案。但是背诵出结论，会更节省时间。此类题目考法单一，想用结论必须严格按照我所给的条件处理。

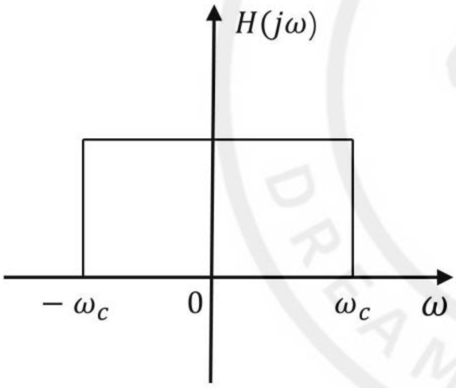
手机扫码观看/分享

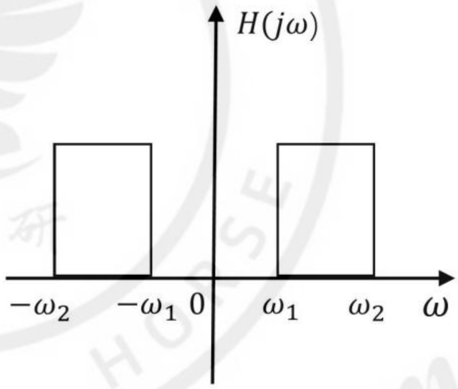
【讲解】实战-经典例题

4.13 带宽

4.13.1 滤波器的带宽（通带的宽度，绝对带宽）

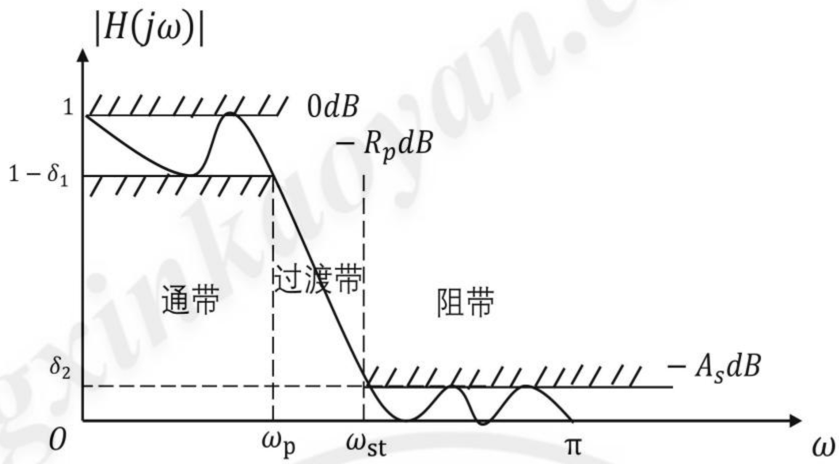
若低通滤波器截止频率为ω_c，则带宽为ω_c。若为带通滤波器，则带宽为$\omega_2-\omega_1$





小马哥 Tips：这注意低通信号和带通信号的计算方式不同，但是都是只计算正频率部分。平时题目所说的带限信号，就是有限频带信号，带宽一定是一个有限制。

4.13.2 3dB带宽、半功率点带宽（正频率部分）



对数幅度定义：增益 $20log_{10}|H(j\omega)| = 10\,log_{10}|H(j\omega)|^2$ 单位db分贝。衰减=−增益 =−$20\,log_{10}|H(j\omega)|$

小马哥 Tips：注意实际题目中$\boldsymbol{\omega_0}$处的衰减计算公式为：

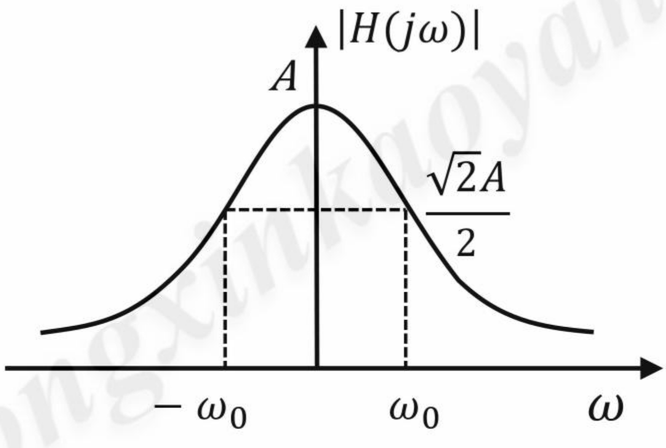
$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega_0)|}{|H(j\omega)|_{max}}$$

3dB带宽、半功率点带宽即增益 $20\,log_{10}|H(e^{j\omega})| = 10\,log_{10}|H(e^{j\omega})|^2 = 3$

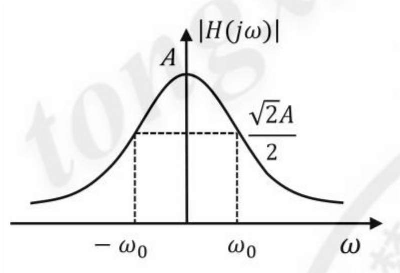
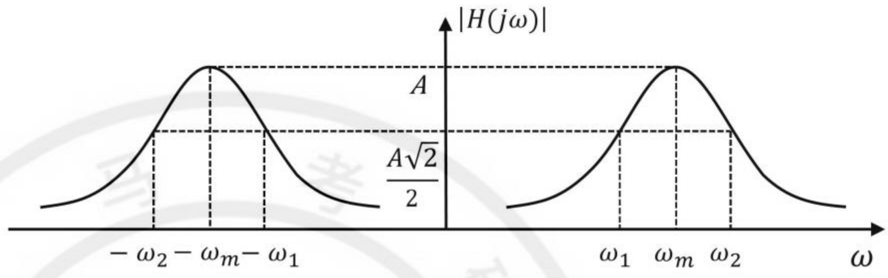
即：

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



小马哥Tips：

#	低通信号	带通信号
1	$3dB$带宽定义为中心频率的幅度谱$\|H(j\omega)\|_{max}$下降为$\|H(j\omega)\|_{max}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\|H(j\omega_0)\|$时对应频率点$\omega_0$，如图带宽为$\omega_0$。	3dB 带宽定义为中心频率的幅度谱$\|H(j\omega)\|_{max}$下降为$\|H(j\omega)\|_{max}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\|H(j\omega_1)\|=\|H(j\omega_2)\|$时对应频率点，如图所示，带宽为$\omega_2-\omega_1$。**中科院 23 年真题。**
2		

4.13.3 第一过零点带宽

一般应用于矩形脉冲信号，其频谱Sa函数若第一个零点为$\frac{2\pi}{\tau}$，定义此信号的带宽为$\frac{2\pi}{\tau}$。

小马哥Tips： 因为Sa函数主瓣的面积比剩余所有旁瓣加起来面积都大，能量主要在主瓣，所以才有此定义。

4.14 相关

4.14.1 自相关与互相关

#		能量信号的相关函数	功率信号的相关函数
1	互相关函数	$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2^*(t-\tau)dt$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t+\tau)f_2^*(t)dt$	$R_{12}(\tau)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1(t)f_2^*(t-\tau)dt$ $=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1(t+\tau)f_2^*(t)dt$

			$R_{21}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1^*(t-\tau)f_2(t)dt$ $=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1^*(t)f_2(t+\tau)dt$ $R_{12}(\tau)=R_{21}^*(-\tau)$ **注：对于周期信号，可以把极限符号去掉，只在一个周期计算即可。**
2	自相关函数	$R(\tau)=R_{11}(\tau)$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_1^*(t-\tau)dt$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t+\tau)f_1^*(t)dt$ $R(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_1^*(t)dt=E$ $R(\tau)=R^*(-\tau)$ $R(\tau)\leftrightarrow$ 能量谱密度$\lvert F(\omega)\rvert^2$	$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1(t-\tau)f_1^*(t)dt=P$ $R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1(t)f_1^*(t)dt=P$ **注：对于周期信号，可以把极限符号去掉，只在一个周期计算即可。** $R(\tau)=R^*(-\tau)$ $R(\tau)\leftrightarrow$ 功率谱密度$\lvert F(\omega)\rvert^2$

小马哥 Tips: **重要知识点，自相关必须掌握公式，互相关一般不考。**

4.14.2 相关与卷积的关系

三角函数的自相关函数公式：

形如$Ecos(\omega t+\vartheta)$和$Esin(\omega t+\vartheta)$，自相关函数为：

$$R(\tau)=\frac{E^2}{2}cos(\omega\tau)$$

可以直接得出三角函数的功率：$\boldsymbol{R(0)=\frac{E^2}{2}}$

小马哥 Tips: **非常常用，中科院 22 真题知道这个知识点，可以秒杀。但是需要注意，如果**$Ecos(\omega t+\vartheta)$和$Esin(\omega t+\vartheta)$带了阶跃，比如：$Ecos(\omega t+\vartheta)u(t)$和$Esin(\omega t+\vartheta)u(t)$就不能用这个公式计算。

4.14.3 能量谱与功率谱(维纳辛钦定理)

1、能量谱密度（能量频谱，能量谱）（单位频率的信号能量）

$$E(\omega)=|F(\omega)|^2$$

总能量：

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2df=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt$$

能量谱与自相关函数为一对傅里叶变换对

2、功率谱密度

$$\mathcal{P}(\omega)=\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\delta(\omega-n\omega_0),\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

功率谱密度与自相关函数为一对傅里叶变换对

小马哥 Tips：非常常用，功率谱和能量谱基本都是这么画。

手机扫码观看/分享

【讲解】自相关函数互相关函数、维纳辛钦定理、三角函数的自相关公式

4.14.4 离散序列的相关

$$R_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-m),\ R_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-m)$$

小马哥 Tips：（不怎么考）

4.14.5 信号经线性时不变系统后输出的自相关函数和能量谱密度

①能量信号

$$\psi_r(\omega)=|H(j\omega)|^2\psi_e(\omega)$$

②功率信号

$$\phi_r(\omega)=|H(j\omega)|^2\phi_e(\omega)$$

$$R_r(\tau)=R_e(\tau)*R_h(\tau)$$

4.15 系统的物理可实现性(佩利-维纳准则)

物理可实现的网络

时域特性：$h(t) = h(t)u(t)$ 因果条件

频域特性：$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2\, d\omega < \infty$，即$|H(j\omega)|$满足平方可积条件。

佩利-维纳准则——系统可实现的必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|ln\,|H(j\omega)||}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty$$

小马哥 Tips：了解，一些学校会考简答题，你能把它默写出来就可以了。

4.16 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性

对于因果系统，若$h(t)$在原点不包含$\delta(t)$，且$h(t) \leftrightarrow H(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$，则有

$$\begin{cases} R(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda} d\lambda \\ X(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda} d\lambda \end{cases}$$

小马哥 Tips：证明题，判断题都可能出，掌握一个因果信号，频域实部和虚部是互相制约的，也就是知道一个就可以算出另外一个。23 中科院 859 真题。

手机扫码观看/分享

【讲解】希尔伯特-因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性

第五章 拉氏变换

5.1 拉普拉斯变换

5.1.1 定义及收敛域

#	类型	表达式	拉氏反变换
1	双边拉普拉斯变换对	$F_B(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ $=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_B(s)]$ $=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_B(s)e^{st}\,ds$ 其中，$s=\sigma+j\omega$称为复频率。
2	单边拉普拉斯变换对	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ $=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ $=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$ $t\geq 0$

小马哥 Tips：我通常背的都是双边，因为对$\boldsymbol{f(t)}$做单边就是，对$\boldsymbol{f(t)u(t)}$做双边。注：因果信号的双边 s 等于单边 s。

手机扫码观看/分享

【讲解】不同收敛域相同 S 变换原理 13 分 13s

(3)收敛域的定义：使$F(s)$存在的复变量s的取值区域称为函数$F(s)$的收敛域，记为 ROC。

#	信号分类	举例	收敛域
1	因果信号	$e^{at}u(t)$	$\sigma>\alpha$
2	反因果信号	$e^{\beta t}u(-t)$	$\sigma<\beta$
3	非因果信号	$e^{at}u(t)+\delta(t+1)$ $e^{\beta t}u(-t)+\delta(t-1)$	$\sigma>\alpha$ $\sigma<\beta$
4	双边信号	$e^{at}u(t)+e^{\beta t}u(-t)$	$\alpha<\sigma<\beta$
5	右边信号	$e^{at}u(t)$	$\sigma>\alpha$
6	左边信号	$e^{\beta t}u(-t)$	$\sigma<\beta$

7	双边信号	$e^{at}u(t)+e^{\beta t}u(-t)$	$\alpha<\sigma<\beta$

(4)典型信号一览

#	典型信号	信号	因果信号	反因果信号
1	时限信号 有始有终，能量有限的信号，收敛坐标落于∞	$EG_{\tau}(t)$ $ETri(t)$ 矩形窗 三角窗 单个脉冲信号	$\sigma>-\infty$ s全平面	$\sigma<\infty$ s全平面
2	平稳信号	正余弦信号	$\sigma>0$	$\sigma<0$
3	增长信号	e^{at}	$\sigma_0>\alpha$	$\sigma_0<\alpha$
4	衰减信号	e^{-at}	$\sigma_0>-\alpha$	$\sigma_0<-\alpha$
5	不收敛信号	$e^{t^{1000}}$	没有任何收敛域能够使其收敛	

小马哥 Tips：**熟练记忆和掌握，时限信号收敛域全平面非常常用。**

手机扫码观看/分享

【讲解】拉氏变换的引入+因果非因果反因果区分 10 分 20s

5.1.2 双边拉氏变换的性质

#	性质名称	时间函数$f(t)$	复频域函数$F(s)$
1	线性	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_{b1}(s)+bF_{b2}(s)$
2	时移	$f(t-t_0)$	$e^{-st_0}F_b(s)$
3	s域平移	$e^{s_0t}f(t)$	$F(s-s_0)$

4	尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F_b\left(\frac{s}{a}\right)$
5	时域微分	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF_b(s)$
6	s域微分	$-tf(t)$	$\frac{d}{ds}F_b(s)$
7	时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F_b(s)$
8	s域积分	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_{s}^{\infty} F_b(\eta)d\eta$
9	时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_{b1}(s)\cdot F_{b2}(s)$
10	s域卷积（用不上）	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_{b1}(\eta)F_{b2}(s-\eta)d\eta$

小马哥 Tips：**熟练记忆和掌握，我背的都是双边，只需要记住。对$\boldsymbol{f(t)}$做单边就是，对$\boldsymbol{f(t)u(t)}$做双边。即可解决所有问题。**

手机扫码观看/分享

【讲解】常见 s 变换的性质

5.1.3 单边拉氏变换的基本性质

#	性质名称	时间函数$f(t)$	复频域函数$F(s)$	收敛域

1	线性	$C_1f_1(t)+C_2f_2(t)$	$C_1F_1(s)+C_2F_2(s)$	$\sigma>max(\sigma_1,\sigma_2)$
2	时移	$f(t-t_0)u(t-t_0)$ $t_0>0$	$F(s)e^{-st_0}$ $t_0>0$	$\sigma>\sigma_0$
3	尺度变换	$f(at)$，$a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$\sigma>a\sigma_0$
4	频移	$f(t)e^{s_0t}$ s_0为复常数	$F(s-s_0)$	$\sigma>\sigma_0+Re\,(s_0)$
5	时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0_-)$	$\sigma>\sigma_0$
		$\frac{df^n(t)}{dt}$	$s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r}f^{(r)}(0_-)$	$\sigma>\sigma_0$
6	时域积分	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0_-)}{s}$	-
7	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$	$\sigma>max(\sigma_1,\sigma_2)$
8	时域相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(\eta)F_2(s-\eta)d\eta$	$\sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$ $\sigma>\sigma_1+\sigma_2$
9	s 域微分	$-tf(t)$	$F^{'}(s)$	$\sigma>\sigma_0$
10	s 域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty}F(s)ds$	$\sigma>\sigma_0$
11	初值定理	$lim_{t\to 0_+}f(t)=f(0_+)=lim_{s\to\infty}sF_1(s)$，$F_1(s)$是$F(s)$分离出的真分式。 如果$F(s)$本身就是真分式，可以直接用初值定理。		
12	终值定理	$f(\infty)=lim_{s\to 0}sF(s)$，$s=0$ 在收敛域内。 即终值存在，才能用终值定理		

小马哥 Tips：初值定理、终值定理一定要注意使用条件。

5.1.4 拉氏逆变换常用公式

情况	象函数	原函数
单极点	$F(s)=\sum_{i=1}\frac{K_i}{s-s_i}$	$f(t)=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{s_it}\varepsilon(t)$
共轭单极点	$F(s)=\frac{K_1}{s-\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s-\alpha+j\beta}$	$f(t)=2e^{\alpha t}[Acos\,(\beta t)-Bsin\,(\beta t)]\varepsilon(t)$
	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$sin\,(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$cos\,(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}sin\,(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}cos\,(\beta t)\varepsilon(t)$
重极点	$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-s_1)}$	$f(t)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}\right]e^{s_1t}\varepsilon(t)$

小马哥 Tips： 不用特殊背，把下面的常见变换对都背下来，自然融会贯通。

5.1.5 常见信号的拉氏变换

#	名称	时间函数$f(t)$	复频域函数$F(s)$	收敛域
1	单位冲激偶信号	$\delta'(t)$	s	全部 s
2	单位冲激信号	$\delta(t)$	1	全部 s
3	单位阶跃信号	$\varepsilon(t)$	$1/s$	$\sigma>0$
		$-\varepsilon(-t)$	$1/s$	$\sigma<0$
4	斜边信号	$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\sigma>0$
5	单边指数信号	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma>-a$

		$-e^{-\alpha t}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma<-a$
		$te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\sigma>-a$
6	正弦信号	$sin\,\omega t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sigma>0$
7	余弦信号	$cos\,\omega t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sigma>0$
8	正弦衰减信号	$e^{-\alpha t}sin\,\omega t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sigma>-a$
9	余弦衰减信号	$e^{-\alpha t}cos\,\omega\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sigma>-a$
10	-	$tsin\,\omega t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\sigma>0$
11	-	$tcos\,\omega t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\sigma>0$
12	高阶斜变信号	$\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	
13	斜变衰减信号	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	
14	周期冲激信号	$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\sigma>0$

小马哥 Tips：必须天天背，12-13 行不怎么考。

手机扫码观看/分享

【讲解】常见 s 变换对

5.1.6 有始周期信号的拉氏变换

若单边周期信号$x(t)$的周期为T，其第一周期内的信号为$x_1(t)$，则

$$X(s)=X_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

小马哥 Tips：重点内容，最好会推导，会推导才能立于不败之地，否则易错。只是死记硬背，有风险，去看我的讲解。扫码看例题：

手机扫码观看/分享

【讲解】有始周期实战经典例题

5.2 系统函数$H(s)$

5.2.1 系统函数$H(s)$的定义

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比。

5.2.2 系统函数$H(s)$的求法

(1)由冲激响应求，即$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$；

(2)由零状态s域电路模型出发，根据KVL，KCL，OL，求出$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$;

(3)由零状态系统的微分方程出发，两端取拉氏变换求$H(s)$，即$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$;

(4)由系统的框图流图，结合梅森：$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$

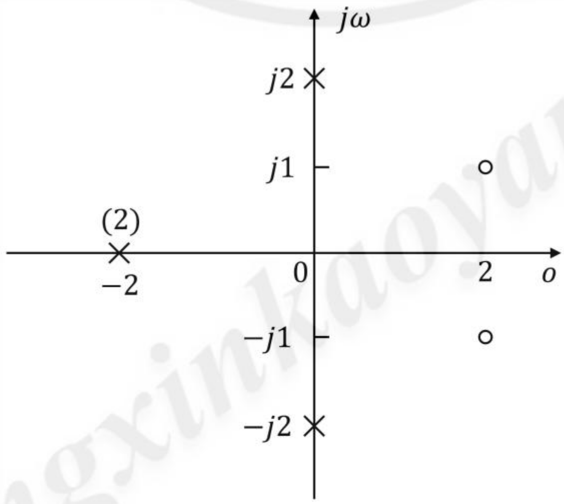
5.2.3 $H(s)$的一般表示形式及其零、极点图

(1)$H(s)$的一般表示形式

零点的定义：当$s=z_i$时，$H(s)=0$，故称z_i为$H(s)$的零点；

极点的定义：当$s=p_i$时，$H(s)=\infty$，故称p_j为$H(s)$的极点。

举例如图：



手机扫码观看/分享

【讲解】s 域零极点确定时域特性

②极点位置与$h(t)$的关系

阶次	极点位置	拉氏变换
单极点	s平面的正实轴	$H(s)=K\frac{1}{s-a}\leftrightarrow h(t)=Ke^{at}\varepsilon(t)$
	s平面的坐标原点	$H(s)=K\frac{1}{s}\leftrightarrow h(t)=K\varepsilon(t)$
	s平面的右半开面的共轭极点	$H(s)=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=e^{at}sin\,(\omega t)\varepsilon(t)$
	s平面的虚轴	$H(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=sin\,(\omega t)\varepsilon(t)$
	s平面的左半开面的共轭极点	$H(s)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=e^{-at}sin\,(\omega t)\varepsilon(t)$
重极点	坐标原点的二阶或三阶极点	$H(s)=\frac{1}{s^2}\leftrightarrow h(t)=t\varepsilon(t)$ $H(s)=\frac{1}{s^3}\leftrightarrow h(t)=\frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$
	实轴上的二阶或三阶极点	$H(s)=\frac{1}{(s+a)^2}\leftrightarrow h(t)=te^{-at}\varepsilon(t)$ $H(s)=\frac{1}{(s+a)^3}\leftrightarrow h(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-at}\varepsilon(t)$
	虚轴上的二阶共轭极点	$H(s)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\leftrightarrow h(t)=tsin\,(\omega t)\varepsilon(t)$

小马哥 Tips：**重点内容**

手机扫码观看/分享

【讲解】S 变换考研做题技巧

5.2.4 系统函数$H(s)$的零、极点与系统分析

(1)求系统的单位样值响应

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t)$$

(2)求解系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \ \ 或\ Y_{zs}(s) = E(s)H(s)$$

(3)根据$H(s)$可以直接写出系统的微分方程

例如设

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 6s + 12}$$

则系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 12y(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 2\frac{d}{dt}e(t) + 5e(t)$$

(4)$H(s)$的零、极点分布决定系统的频响特性

频响特性：指系统在正弦信号激励下稳态响应随频率的变化情况。

对于稳定系统，其频响特性即$H(\mathrm{j}\omega)$。

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| \sim \omega \qquad 幅频特性$$

$$\varphi(\omega) \sim \omega \qquad 相频特性$$

由复频特性可知系统是低通、高通、带通或是带阻，如果是带通系统从复频特性还可

以看出它的中心频率，上、下截止频率，通频带宽度。

手机扫码观看/分享

【讲解】s 域判断稳定性

(5)$H(s)$的零、极点判断系统的**稳定性**

定义：一个系统，如果对任意的有界输入，其零状态响应也是有界的

即

$$|f(\cdot)|\leqslant M_f(\text{正实常数})\text{，则}|y_{zs}(\cdot)|\leqslant M_f(\text{正实常数})$$

单位冲激/序列响应法

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\mathrm{d}t \leq M(M\text{为正常数})$$

根据$H(s)$在s平面中极点分布的位置，把因果系统划分为三种情况:

①稳定系统：如果$H(s)$的全部极点都在s左半平面，系统是稳定的，满足

$$\lim_{t\to\infty}[h(t)] = 0$$

②临界稳定系统：虚轴上极点是单阶的。

③不稳定系统：如果$H(s)$中的极点落在s右半平面或虚轴上具有二阶以上极点。

(6)$H(s)$的零、极点判断系统的**因果性**

因果性：系统的零状态响应不会出现于激励作用之前的系统。

即对于$t=0$ (或 $\mathrm{k}=0$)接入的任意激励$f(\cdot)$，即对于任意的$f(\cdot)=0$，t(或 k)<0，如果系统的零状态响应都有$y_{zs}(\cdot)=0$，t(或k)<0。

充分必要条件:

$$h(t) = h(t)u(t)$$

由$H(s)$判定系统的因果性：若$H(s)$收敛域为收敛坐标σ_0以右的s平面，则该系统即为因果系统。

(7)求系统的正弦稳态响应$y_s(t)$

设系统的激励

$$e(t) = E_m cos\,(\omega_0 t + \phi)u(t)$$

则系统的正弦稳态响应为

$$y_s(t) = |H(j\omega_0)|E_m cos\left[\omega_0 t + {}_{\phi} + \varphi(\omega_0)\right]$$

其中$H(j\omega_0) = H(s)|_{s=j\omega_0} = |H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$

(8)霍尔维茨稳定性准则**(冷门)**

将$H(s)$的分母多项式$B(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0$分为奇偶次幂项$M(s)$与$N(s)$，即

$$M(s) = b_n s^n + b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-4}s^{n-4} + \cdots$$

$$N(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-3}s^{n-3} + b_{n-5}s^{n-5} + \cdots$$

然后将$M(s)$与$N(s)$转辗相除，即$\frac{M(s)}{N(s)}$作连分式展开，如下述公式所示:

$$\frac{M(s)}{N(s)} = q_1 s + \cfrac{1}{q_2 s + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1}s + \cfrac{1}{q_n s}}}$$

当$B(s) = 0$的全部根位于s左半平面时，全部系数q_i为正值。这是系统稳定的充要条件。

5.3 部分分式展开法结合高数法、留数定理

5.3.1 部分分式展开法

单根按照单根走，几重跟展几项。

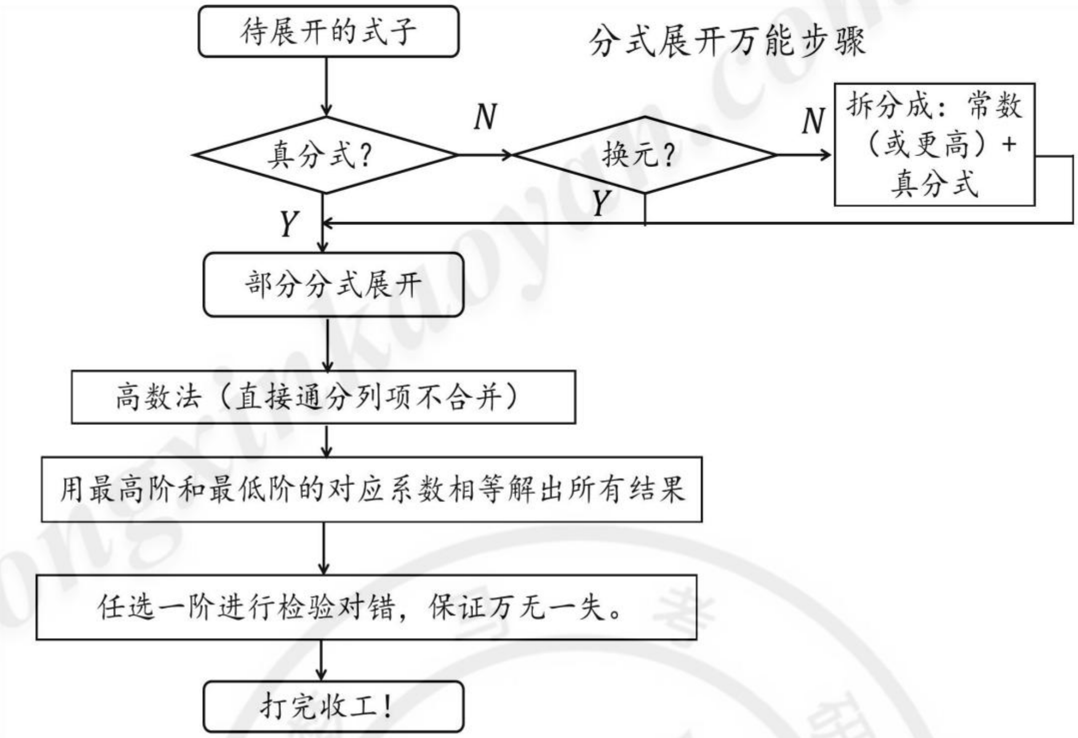
-部分分式展开注意条件:

①必须为真分式

分子的次数低于分母的次数,则这个分式叫做真分式。

②多重极点特殊处理

-部分分式展开的万能步骤:



【注】

第一点：若出现假分式，可以不用拆出真分式，可以左右两侧同时除 s 或者z^{-1}或者 z，等到算出展开结果再乘回来

第二点：关于最后的结果验证，无需选择一阶验证，可以直接带入展开前后的一个好算的值，验证左右两侧是否相同，一般可以代入 0、±1，（此值不能为极点）

若出现共轭复数根，则可用原式减已求出结果的项目，就会得到共轭复数跟的展开因式。

小马哥 Tips：这个必须，我讲过可补课。自认为，我讲的方法是最快最准的方法。

手机扫码观看/分享

【讲解】部分分式结合高数展开

手机扫码观看/分享

【讲解】带有复数根的部分分式展开

5.3.2 留数定理

若拉氏变换表达式$F(s)$有n个极点，则其反变换为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} n_i$$

若p_i为一阶极点，则

$$r_i=[(s-p_i)F(s)e^{st}]|_{s=p_i}$$

若p_i为k阶极点，则

$$r_i=\frac{1}{(k-1)!}\left\{\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_i)^kF(s)e^{st}]\right\}\bigg|_{s=p_i}$$

小马哥 Tips：这真的有学校（23年湖南师范大学997）考这个，我也是无语。这就只能背，没有捷径。

5.3.3 特征输入（特征函数）与正弦稳态法

#	变换	输入	输出
1	连续时间傅里叶	$Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$	$A\|H(j\omega_0)\|e^{j(\omega_0 t+\varphi)}e^{j\varphi(\omega_0)}$
2		$Acos(\omega_0 t+\varphi)$	$A\|H(j\omega_0)\|cos(\omega_0 t+\varphi+\varphi(\omega_0))$
3	离散时间傅里叶	$Ae^{j(\omega_0 n+\varphi)}$	$A\|H(e^{j\omega_0})\|e^{j(\omega_0 n+\varphi)}e^{j\varphi(\omega_0)}$
4		$Acos(\omega_0 n+\varphi)$	$A\|H(e^{j\omega_0})\|cos(\omega_0 n+\varphi+\varphi(\omega_0))$
5	周期信号	$\sum_{-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\omega_1 t}$	$\sum_{-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\omega_1 t}\|H(jn\omega_1)\|e^{j\varphi(n\omega_1)}$
6	拉氏变换	$Ae^{s_0 t}$ s_0在系统收敛域内	$Ae^{s_0 t}H(s_0)$

7	z变换	$z_0{}^n$ z_0在系统收敛域内	$z_0{}^n H(z_0)$
8	连续域正弦稳态	$Acos(\omega_0 t+\varphi)u(t)$	$A\lvert H(j\omega_0)\rvert cos(\omega_0 t+\varphi+\varphi(\omega_0))u(t)$
9	离散域正弦稳态	$Acos(\omega_0 n+\varphi)u(n)$	$A\lvert H(e^{j\omega_0})\rvert cos(\omega_0 n+\varphi+\varphi(\omega_0))u(n)$

小马哥 Tips：**这必须会，不会的同学公众号通信考研小马哥，后台回复特征输入。或者直接扫码，按照顺序看。**

手机扫码观看/分享

①【CTFT】特征输入和正弦稳态

手机扫码观看/分享

②【S 域】：特征输入和正弦稳态

手机扫码观看/分享

③【DTFT】特征输入和正弦稳态

手机扫码观看/分享

④【Z 域】：特征输入和正弦稳态

5.4 梅森公式与信号流图

梅森公式表明信号流图中输出和输入节点之间的传输函数

$$H=\frac{\sum_i g_i\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta=1-\sum_a L_a+\sum_{bc} L_b L_c+\ldots$$

①g_i为第i条通路对应的增益

②Δ_i为与第i条通路不接触的其他剩余环路的Δ

③$\sum_a L_a$：多有环路增益之和

④$\sum_{bc} L_b L_c$：两两互不接触的环路增益乘积之和

...

Δ_i为**扣掉与第i条前向通路相接触的环路**后的特征行列式，即将与第i条前向通路相接触

的环路去除后再计算。

小马哥 Tips：必须掌握，不论考纲是否有这个东西，必须会。

手机扫码观看/分享

【讲解】梅森公式补课

5.5 罗斯准则（罗斯阵列）

5.5.1 判断先提条件

①全部系数$b_i > 0$,且无缺项，则下一步，若不符合则有正实根

②若缺项，则缺全部偶次幂项或者奇次幂项，则继续列罗斯阵列判断，若不符合则有正实根

5.5.2 罗斯阵列判断

罗斯阵列第一列数字符号相同（全部>0），则无正实根

变号的次数就是具有正实根的（右半平面）的个数

罗斯阵列的列法：

首列：从s^n，$s^{n-1}...s^0$

第一行：b_n，b_{n-2}，b_{n-4}...

第二行：b_{n-1}，b_{n-3}，b_{n-5}

其他行根据下列规则列写：

罗斯阵列可按如下规则排列：

第 1 行	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	$\cdots$
第 2 行	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	$\cdots$
第 3 行	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	$\cdots$
第 4 行	d_{n-1}	d_{n-3}	d_{n-5}	$\cdots$
第 5 行	e_{n-1}	e_{n-3}	e_{n-5}	$\cdots$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-3}=-\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix}b_n & b_{n-4}\\ b_{n-1} & b_{n-5}\end{vmatrix},$$

$$d_{n-1}=-\frac{1}{c_{n-1}}\begin{vmatrix}b_{n-1} & b_{n-3}\\ c_{n-1} & c_{n-3}\end{vmatrix}$$

$$d_{n-3}=-\frac{1}{c_{n-1}}\begin{vmatrix}b_{n-1} & b_{n-5}\\ c_{n-1} & c_{n-5}\end{vmatrix}$$

两个特殊情况：

①若第一列出现 0，则用无穷小ε代替继续做

②若连续两行相等或者成比例，则下一行会出现全零行，此时需要用前一行组成辅助多项式，对求导之后的新系数代替全 0 行，继续列罗斯阵列。计算辅助多项式的跟，若在虚轴上有单极点则为临界稳定，若为多重极点，则不稳定。

小马哥 Tips：**掌握，一般考察 2，3 阶，所以掌握简化的也可以。**

针对 2 阶和 3 阶的解题小技巧：

二阶罗斯阵列： $b_2s^2+b_1s+b_0$

只需要b_2，b_1，b_0分别大于 0

三阶罗斯阵列： $b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0$

只需要b_3，b_2，b_1，b_0分别大于 0，$b_1b_2>b_3b_0$

手机扫码观看/分享

【讲解】罗斯阵列补课

手机扫码观看/分享

【讲解】简化 2 阶、3 阶罗斯

5.6 傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

5.6.1 $F(s)$和$F(j\omega)$的关系

①收敛域包括虚轴，则$F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}$；

②收敛域不包括虚轴，则$F(j\omega)$不存在；

③临界条件，虚轴存在极点，则$F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}+\pi\sum_n k_n\delta(\omega-\omega_n)$。

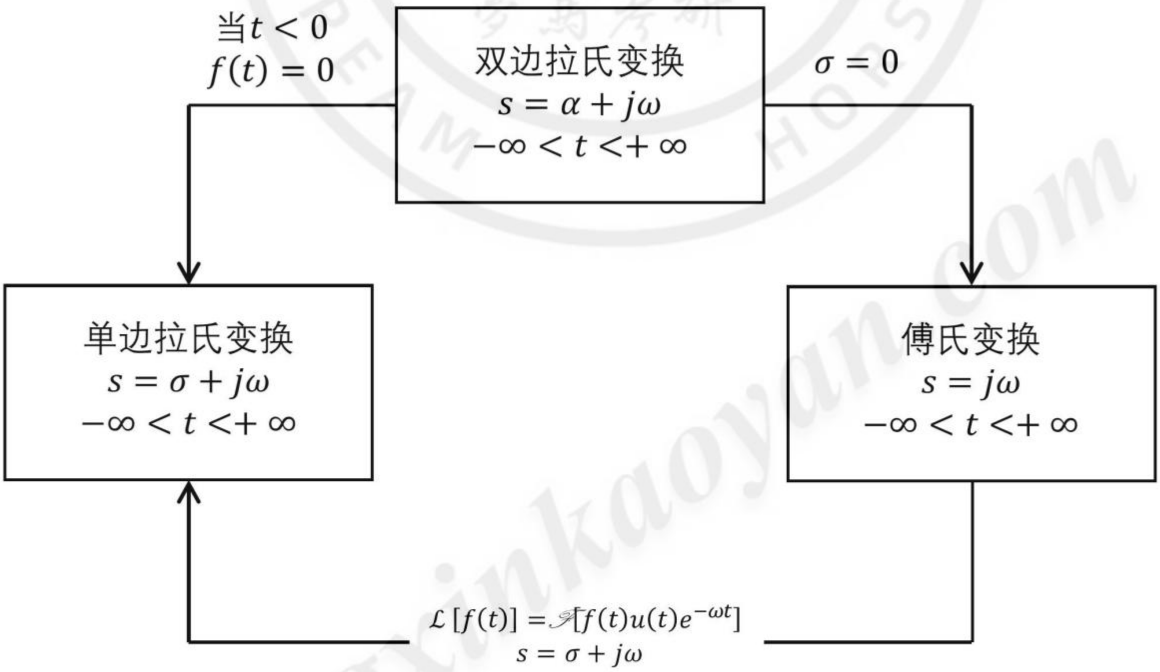
$$F(s)=F_a(s)+\frac{K_{11}}{(s-j\omega_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-j\omega_1)^{r-1}}+\ldots+\frac{K_{1r}}{(s-j\omega_1)}$$

式中$F_a(s)$的所有极点在s左半平面，$f(t)$的傅里叶变换为

$$F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}+\frac{\pi K_{11}(j)^{r-1}}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}(\omega-\omega_1)+\frac{\pi K_{12}(j)^{r-2}}{(r-2)!}\delta^{r-2}(\omega-\omega_1)+\ldots+\pi K_{1r}\delta(\omega-\omega_1)$$

小马哥 Tips：掌握，一般考察前两种情况。

5.6.2 单边拉氏变换、双边拉氏变换、傅氏变换的关系图



第六章 z变换

6.1 z变换的定义及收敛域

6.1.1 z变换的定义

对于一切n值都有意义的双边序列$x(n)$，其双边z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

逆变换**（不考，涉及到围线积分）**

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}X(z)z^{n-1}\,dz$$

如果$x(n)$为因果序列，其单边z变换为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

手机扫码观看/分享

【讲解】不同收敛域相同 z 变换原理

6.1.2 z变换的性质

性质	时间函数$\boldsymbol{x(n)}$	单边z变换$\boldsymbol{X(z)}$	双边z变换$\boldsymbol{X_B(z)}$
线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	$aX_{B1}(z)+bX_{B2}(z)$
时移	$x(n-m)u(n-m)$ $m>0$	$z^{-m}X(z)$	$z^{-m}X_B(z)$
	$x(n-m)u(n)$ $m>0$	$z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$	$z^{-m}X_B(z)$
	$x(n+m)u(n)$	$z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$	$z^{+m}X_B(z)$

	$m>0$		
z域微分	$nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$-z\dfrac{dX_B(z)}{dz}$
	$n^m x(n)$	$\left[-z\dfrac{dX(z)}{dz}\right]^m X(z)$	$\left[-z\dfrac{dX_B(z)}{dz}\right]^m X(z)$
z域尺度变换	$a^n x(n)$ (a为非零常数)	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$ **或者把所有的z^{-1}变成az^{-1}**	$X_B\left(\dfrac{z}{a}\right)$ **或者把所有的z^{-1}变成az^{-1}**
时域卷积定理	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)\cdot X_2(z)$	$X_{B1}(z)\cdot X_{B2}(z)$
z域卷积定理	$x(n)\cdot h(n)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H\left(\dfrac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X_B(v)H_B\left(\dfrac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv$
初值定理	$x(n)$ (因果序列)	$x(0)=lim_{z\to\infty}X(z)$	$x(0)=lim_{z\to\infty}X_B(z)$
终值定理	$x(n)$ (因果序列，且x(∞)为有界值)	$x(\infty)=lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	$x(\infty)$ $=lim_{z\to 1}(z-1)X_B(z)$
反褶	$x(-n)u(-n)$	-	$X\left(\dfrac{1}{z}\right)$

小马哥 Tips：类比连续，背双边的，对$x(n)$进行单边 z 就是对$x(n)u(n)$进行双边 z 变换。注：因果信号的双边 z 等于单边 z。视频中我讲的为负次幂，按照自己喜好记忆。

手机扫码观看/分享

【讲解】必背 z 变换的性质

6.1.3 典型序列的z变换

$f(n)$	单边z变换		双边z变换	
	象函数$F(z)$	收敛域	象函数$F_B(z)$	收敛域
单位冲激信号 $\delta(n)$	1	全平面	1	全平面
单位阶跃信号 $u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$u(n-1)$	$\frac{1}{z-1}$	$\|z\|>1$	$\frac{1}{z-1}$	$\|z\|>1$
实指数单边序列 $a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
$a^{n-1}u(n-1)$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
斜变序列 $nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
$n^2u(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
$\frac{n(n-1)}{2}u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
$\frac{(n+1)n}{2}u(n)$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
$na^{n-1}u(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\cdot a^{n-m}u(n)$ $m\geqslant 1$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$\delta(n-m)$，$m>0$	z^{-m}	$\|z\|>0$	z^{-m}	$\|z\|>0$

$-u(-n-1)$	-	-	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|<1$
实指数左边序列 $-a^n u(-n-1)$	-	-	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
$-nu(-n-1)$	-	-	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|<1$
$-na^{n-1}u(-n-1)$	-	-	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$\dfrac{-n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\cdot$ $na^{n-m}u(-n-1)$，$m\geqslant 1$	-	-	$\dfrac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$\delta(n+m)$，$m>0$	-	-	z^m	$\|z\|<\infty$
$a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ $\|b\|>\|a\|$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$	$\dfrac{2z^2-(a+b)z}{(z-a)(z-b)}$	$\|a\|<\|z\|$ $<\|b\|$
单边余弦序列 $cos\ (\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z(z-cos\ \omega_0)}{z^2-2zcos\ \omega_0+1}$	$\|z\|>1$	$\dfrac{z(z-cos\ \omega_0)}{z^2-2zcos\ \omega_0+1}$	$\|z\|>1$
单边正弦序列 $sin\ (\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{zsin\ \omega_0}{z^2-2zcos\ \omega_0+}$	$\|z\|>1$	$\dfrac{zsin\ \omega_0}{z^2-2zcos\ \omega_0+}$	$\|z\|>1$
$cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z^2}{z^2+1}$	$\|z\|>1$	$\dfrac{z^2}{z^2+1}$	$\|z\|>1$
$sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z^2+1}$	$\|z\|>1$	$\dfrac{z}{z^2+1}$	$\|z\|>1$
正弦衰减序列 $r^n sin\ (\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{rzsin\ \omega_0}{z^2-2rzcos\ \omega_0}$	$\|z\|>r$	$\dfrac{rzsin\ \omega_0}{z^2-2rzcos\ \omega_0}$	$\|z\|>r$
余弦衰减序列 $r^n cos\ (\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z(z-rcos\ \omega_0}{z^2-2rzcos\ \omega_0}$	$\|z\|>r$	$\dfrac{z(z-rcos\ \omega_0}{z^2-2rzcos\ \omega_0}$	$\|z\|>r$

周期冲激序列 $\sum_{m=0}^{\infty}\delta(t-mN)$	$\dfrac{1}{1-z^{-N}}$	$\lvert z\rvert>1$	$\dfrac{1}{1-z^{-N}}$	$\lvert z\rvert>1$

小马哥 Tips： 多看多背，熟练掌握。视频中我讲的为负次幂，按照自己喜好记忆即可。

手机扫码观看/分享

【讲解】必背常见信号的 z 变换

6.1.4 其他重要公式

$$\frac{z}{(z-a)^2}\leftrightarrow ka^{k-1}\varepsilon(k),\ |z|>|a|$$

$$\frac{z}{(z-a)^3}\leftrightarrow \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k),\ |z|>|a|$$

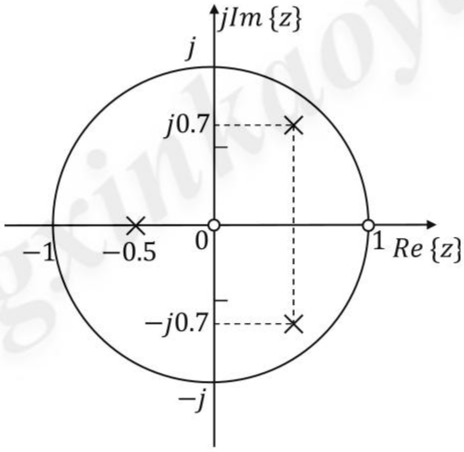
$$\frac{z}{(z-a)^2}\leftrightarrow -ka^{k-1}\varepsilon(-k-1),\ |z|<|a|$$

$$\frac{z}{(z-a)^3}\leftrightarrow -\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(-k-1),\ |z|<|a|$$

6.2 离散时间系统的z域分析

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\dots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0}$$

$$=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$$



极点与$h(n)$的关系：

极点位置	$h(n)$特点
单位圆上	等幅
$\theta=0$ 时，$z=1$	$u(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1}$
单位圆内	减幅
单位圆外	增幅

手机扫码观看/分享

【讲解】必背 z 变换做题技巧

6.2.1 判断系统的稳定性

①定义：$|f(\cdot)|\leqslant M_f$(正实常数)，则$|y_{zs}(\cdot)|\leqslant M_f$(正实常数)

②单位冲激/序列响应法

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

③对于稳定系统其系统函数的极点必在单位圆内部。

6.2.2 判断系统因果性

①定义:对于$t=0$ (或k = 0)接入的任意激励$f(\cdot)$,即对于任意的$f(\cdot)=0$, t(或k)< 0,

②如果系统的零状态响应都有$y_{zs}(\cdot)=0, t$(或k) < 0。

③单位冲激/序列响应法

$$h(k)=0,\ k<0$$

④系统函数极点法：$H(z)$的极点均在收敛圆$|z|=\rho_0$内部

收敛域：$|z|>\rho_0$，即其收敛域为半径等于ρ_0的圆外区域

6.2.3 分析系统的频率响应特性

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H(z)|_{z=\mathrm{e}^{j\omega}} = |H(\mathrm{e}^{j\omega})|_{\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}}$$

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| \sim \omega \text{ 幅频特性}$$

$$\varphi(\omega) \sim \omega \text{ 相频特性}$$

求解频率响应的几何方法

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_r (e^{j\omega - z_r})}{\prod_k (e^{j\omega} - p_k)} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$e^{j\omega} - z_r = U_r e^{j\varphi_r},\ e^{j\omega} - p_k = V_k e^{j\theta k}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_r U_r}{\prod_k V_k},\ \varphi(\omega) = \sum_r \varphi_r - \sum_k \theta_k$$

6.2.4 利用频率响应特性可求出正弦稳态响应

若激励$x(n) = A\cos(\omega n + \theta)$，则系统的稳态响应

$$y_{ss}(n) = A|H(j\omega)|\cos[\omega n + \theta + \varphi(\omega)]$$

小马哥 Tips: **结合后面的特征输入一起学习，熟练掌握。**

6.2.5 朱里准则

举例：

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

需要判断$A(z)$的根都在单位圆内，即$|z| < 1$。

1、朱里准则先提条件

①$A(1) > 0$;若不满足则不稳定

②$(-1)^n A(-1) > 0$，n表示分母的阶数，若不满足则不稳定

2、列朱里表

满足①和②，列朱里表

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
2	a_0	a_l	a_2	…	a_{n-1}	a_n
3	c_{n-1}	c_{n-2}	…	c_l	c_0	
4	c_0	c_1	…	c_{n-2}	c_{n-1}	
5	d_{n-2}	d_{n-3}	…	d_0		
6	d_0	d_1	…	d_{n-2}		
:	:	:	:			
$2n-3$	r_2	r_1	r_0			

第一行正序

第二行照抄倒序

第三行计算

第四行照抄第三行的倒序

第五行计算.......

上述式子一共列 $2n-3$ 行(n表示分母阶数)，该行共三个元素。

奇数行的计算方式：**（包围收紧算法）**

$$c_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}, c_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix} \ldots$$
$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_0 \\ c_0 & c_{n-1} \end{vmatrix}, d_{n-3} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_1 \\ c_0 & c_{n-2} \end{vmatrix} \ldots$$

3、朱里表判稳

若奇数行的第一个数要大于最后一个数的绝对值，则系统稳定，

即$a_n > |a_0|$，$c_{n-1} > |c_0|$。

综上：

设$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

朱里准则:$A(z)$的所有根都在单位圆内的充分和必要条件是

$$\begin{cases} A(1) > 0 \\ (-1)^n A(-1) > 0 \\ a_n > |a_0| \\ c_{n-1} > |c_0| \\ d_{n-2} > |d_0| \\ \cdots, \\ r_2 > |r_0| \end{cases}$$

小马哥 Tips：掌握，考研99%考二阶，所以二阶必背。

简化的二阶朱里准则：

对于二阶系统，分母多项式为$A(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$，若系统稳定，需要满足

$$\boldsymbol{A(1) > 0, A(-1) > 0, a_2 > |a_0|}$$

拓展：

手机扫码观看/分享

【讲解】二阶朱里准则补课

手机扫码观看/分享

【讲解】拓展用罗斯替代朱里

6.3 长除法

长除法一般用在无法部分分式展开求X(z)反变换的情况下（极少），此方法很简单，需要掌握。

排列方式按照左边和右边序列的规则排序即可。

① 若$x(n)$为右边序列，$X(z)$的分子分母按z^{-1}的升幂/z 的降幂排列

② 若$x(n)$为左边序列，$X(z)$的分子分母按 z 的升幂/z^{-1}的降幂排列

举例：右边序列：

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},\ |z| > |a|$$

$$\begin{array}{rl} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ z-a & \overline{\big)\, z \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \underline{z-a \qquad\qquad} \\ & \qquad a \\ & \qquad \underline{a-a^2z^{-1}} \\ & \qquad\qquad a^2z^{-1} \\ & \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

左边序列：

$$X(z)=\frac{z}{-a+z},\ |z|<|a|$$

$$\begin{array}{rl} & -a^{-1}z-a^{-2}z^2-\cdots \\ -a+z & \overline{\big)\, z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \underline{z-a^{-1}z^2 \qquad\qquad} \\ & \qquad\quad a^{-1}z^2 \end{array}$$

小马哥 Tips：需要掌握，考研虽然考频率低，但是有时不可替代。

手机扫码观看/分享

【讲解】长除法

6.4 z域与s域的关系

6.4.1 z变换与拉普拉斯变换的关系

$$F(s)=F(z)|_{z=e^{sT}}$$

$$F(z)=F(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

6.4.2 z~s平面的映射关系

(1)s平面的原点$\begin{cases}\sigma=0\\ \theta=0\end{cases}$，映射$z$平面$\begin{cases}r=1\\ \omega=0\end{cases}$，即$z=1$ 的点。

(2)σ不同取值的$z\sim s$平面的映射关系如表所示

s平面	$\sigma<0$	$\sigma=0$	$\sigma>0$	σ为常数:$-\infty\to+\infty$
	左半平面	虚轴	右半平面	从左向右移
z平面	$r<1$	$r=1$	$r>1$	r为常数，$0\to+\infty$
	单位圆内	单位圆上	单位圆外	半经扩大

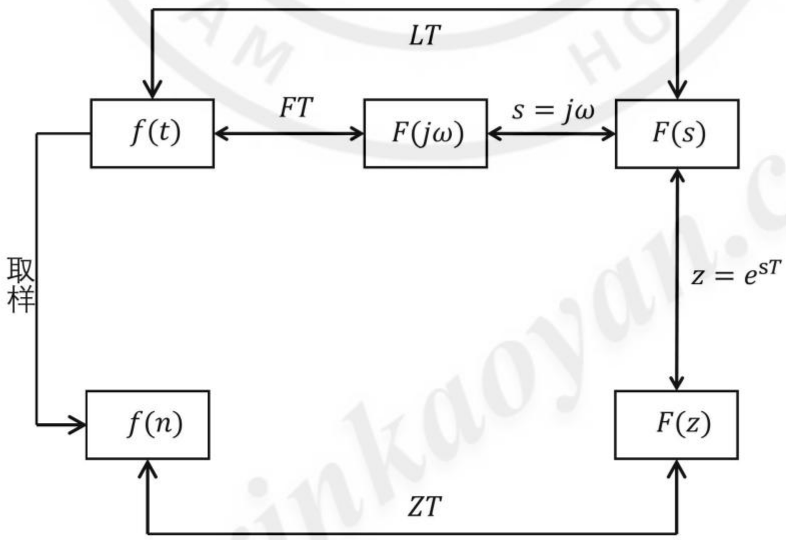
(3)s平面$\theta=0$，实轴$\to$ z平面$\omega=0$，正实轴

小马哥 Tips：需要掌握，一般会出成选择、判断、填空。

手机扫码观看/分享

【讲解】z 变换和 s 变换的关系

6.4.3 傅氏变换、拉氏变换、z变换的关系图



第七章 系统的状态变量分析

7.1 连续时间系统

7.1.1 由状态方程求出特征矩阵

连续系统转移函数

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

特征矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{adj\,(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

小马哥 Tips：必考。adj代表伴随矩阵。| |代表行列式的值。$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，求出的就是系统函数的极点。可以用来判断稳定性。

手机扫码观看/分享

【讲解】状态变量的确定

手机扫码观看/分享

【讲解】状态输出方程的建立

7.1.2 状态转移矩阵e^{At}

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{e}^{At}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^t+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k$$

其拉氏变换

$$\mathcal{L}[\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}t}]=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$$

手机扫码观看/分享

【讲解】预解矩阵的求解

7.1.3 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{e}^{At}$的性质

$$\boldsymbol{\varphi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\varphi}(t_1)\Phi(t_2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = I$$

$$[\boldsymbol{\varphi}(t)]^n = \boldsymbol{\varphi}(nt)$$

$$[\boldsymbol{\varphi}(t_2 - t_1)][\boldsymbol{\varphi}(t_1 - t_0)] = [\boldsymbol{\varphi}(t_2 - t_0)] = [\boldsymbol{\varphi}(t_1 - t_0)][\boldsymbol{\varphi}(t_2 - t_1)]$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}^{At} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{At} = \boldsymbol{e}^{At}\boldsymbol{A}$$

小马哥 Tips：最后一点，真题中会考察求 A。

7.1.4 连续系统状态方程的拉氏变换解

$$A(s) = (sI - A)^{-1}\lambda(0^-) + (sI - A)^{-1}BE(s)$$

$$R(s) = C(sI - A)^{-1}\lambda(0^-) + [C(sI - A)^{-1}B + D]E(s)$$

$$\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\lambda(0^-)\} + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}B\} * e(t)$$

$$r(t) = C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\lambda(0^-)] + \{C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}B] + D\delta(t)\} * e(t)$$

零输入解

$$r_{zp}(t) = C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\lambda(0^-)]$$

雾状态解

$$r_{zs}(t) = \{C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}B] + D\delta(t)\} * e(t)$$

转移函数

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

小马哥 Tips：必考。

手机扫码观看/分享

【讲解】状态输出方程变换域求解

7.2 离散时间系统

7.2.1 由状态方程求出特征矩阵

离散系统转移函数

$$H(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

特征矩阵

$$(zI-A)^{-1}=\frac{adj\ (zI-A)}{|zI-A|}$$

小马哥 Tips：必考。adj代表伴随矩阵。| |代表行列式的值。I为单位矩阵。$|zI-A|=0$，求出的就是系统函数的极点。可以用来判断稳定性。

7.2.2 离散系统状态转移矩阵A^n

$$\varphi(n)=A^n=c_0I+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\qquad n\geqslant k$$

其z变换

$$z[\varphi(n)]=[(zI-A)^{-1}z]=(I-z^{-1}A)^{-1}$$

7.2.3 离散系统状态方程的z变换解

$$\begin{cases}\Lambda(z)=(zI-A)^{-1}z\lambda(0)+(zI-A)^{-1}BX(z)\\Y(z)=C(zI-A)^{-1}z\lambda(0)+C(zI-A)^{-1}BX(z)+DX(z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda(n)=\mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z]\lambda(0)+\mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}B]*x(n)\\y(n)=\mathcal{Z}^{-1}[C(zI-A)^{-1}z]\lambda(0)+\mathcal{Z}^{-1}[C(zI-A)^{-1}B+D]*x(n)\end{cases}$$

零输入解

$$y_{zp}(n)=\mathcal{Z}^{-1}[C(zI-A)^{-1}z]\lambda(0)$$

零状态解

$$y_{zs}(n)=\mathcal{Z}^{-1}[C(zI-A)^{-1}B+D]*x(n)$$

转移函数

$$H(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

小马哥 Tips：必考。

7.3 离散与连续系统状态方程与输出方程

#		连续	离散
1	状态方程	$\left[\frac{d}{dt}\lambda(t)\right]_{k\times1} = \boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)$	$\lambda_{k\times1}(n+1) = A_{k\times k}\lambda_{k\times1}(n)+B_{k\times m}x_{m\times1}(n)$
2	输出方程	$[\boldsymbol{r}(t)]_{r\times1} = \boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)$	$y_{r\times1}(n) = C_{r\times k}\lambda_{k\times1}(n)+D_{r\times m}x_{m\times1}(n)$

7.4 离散与连续系统状态方程时域解

#		连续	离散
1	表达式	$\lambda(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\lambda(0^-)+e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}*\boldsymbol{e}(t)$ $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\lambda(0^-)+[\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}B+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)$	$\lambda(n)=A^n\lambda(0)+\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-1-i}Bx(i)$ $y(n)=CA^n\lambda(0)+\sum_{i=0}^{n-1}CA^{n-1-i}Bx(i)+Dx(n)$
2	零输入解	$\boldsymbol{r}_{zp}(t)=Ce^{\boldsymbol{A}t}\lambda(0^-)$	$y_{zp}(n)=CA^n\lambda(0)$
3	零状态解	$\boldsymbol{r}_{zs}(t)=[\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)$	$y_{zs}(n)=\sum_{i=0}^{n-1}CA^{n-1-i}Bx(i)+Dx(n)$
4	单位冲激响应	$h(t)=Ce^{At}B+D\delta(t)$	$h(n)=CA^{n-1}B+D\delta(n)$

小马哥 Tips： 考试频率较低。

手机扫码观看/分享

【讲解】状态输出方程时域求解

7.5 根据状态方程判断系统的稳定性

①连续系统

只需定出矩阵 A 的特征值 $\mathrm{Re}\,[\alpha_i] < 0$，则系统是稳定的；或者判定特征多项式$|sI - A|$的特征根都位于 s 平面的左半平面。

②离散系统

要求矩阵 A 的特征值$|\alpha_i| < 1$，即系统特征根位于单位圆内。

手机扫码观看/分享

【讲解】系统函数矩阵和稳定性判断

7.6 系统的可控制性与可观测性

7.6.1 可控性

可控性：用输入控制状态变量

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{k-1}B]$$

在给定系统状态方程时，只要M阵满秩，$rankM = n$，系统即为完全可控系统。这是完全可控的充要条件。k为系统的阶数。

7.6.2 可观性

可观性：根据输出观测状态变量

定义一个矩阵，即“可观性判别矩阵”，简称“可观阵”，以N表示，即

$$N = \begin{bmatrix} C \\ \cdots. \\ CA \\ \vdots \\ \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

只要N阵满秩，$rankN = n$，系统即为完全可观系统。这是完全可观的充要条件。

小马哥 Tips：**很简单的东西，不需要知道为什么，公式背下来，剩下的就是线性代数。**

7.6.3 可控和可观性与系统转移函数之间的关系

若$H(s)$中**不出现零点与极点的相消，则系统一定是完全可控和完全可观的。**

若$H(s)$中**出现零点与极点的相消，则系统就是不完全可控或不完全可观的。**

7.7 全通系统和最小相位系统

7.7.1 全通系统

全通系统：幅值为常数，只对相位加权

①连续域全通系统要求：零点和极点是关于虚轴对称

$$H(s)=K\frac{s-a}{s+a}$$

系统的幅频特性为常数，所以系统只对输入信号的相位产生影响。一般应用在传输信号，保证幅频特性的情况下，进行相位校正和相位均衡。

小马哥 Tips：最重要的是零极点关系：零极点关于虚轴镜像对称$s_0=-s_0$

手机扫码观看/分享

【讲解】连续域的全通系统

②离散域全通系统要求：

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$$

ap下标代表：all pass

由公式可知：$H_{ap}(z)$的每一个极点都有一个对应的共轭倒数的零点对应。

且群延迟恒正，连续相位恒负。

小马哥 Tips：**最重要的是零极点关系：零极点共轭倒数关系：$\boldsymbol{z_0=\frac{1}{z_0^*}}$**

手机扫码观看/分享

【讲解】离散域的全通系统

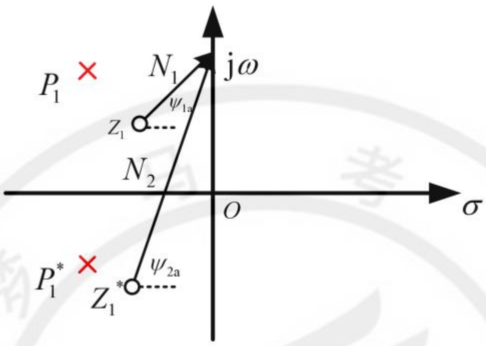
7.7.2 最小相位系统

最小相移系统：零点都在虚轴的左半平面（SS的定义）

一般情况系统还是因果的，所以此时就是零点和极点全部位于虚轴的左半平面。

离散的是位于单位圆内。

$$H_a(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_1^*)}{(s-p_1)(s-p_1^*)}$$



任何一个非最小相移系统都可以拆成一个最小相移和全通系统的乘积。

非最小相移系统=$H_{ap}(s)\cdot H_{min}(s)$

核心原理：将虚轴右侧零点映射到虚轴左边。

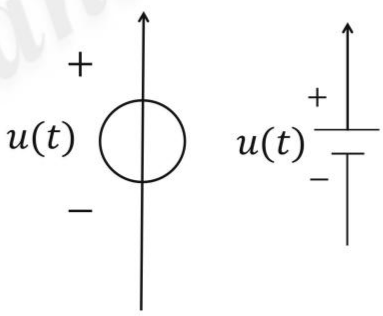
小马哥 Tips： 最重要的是最后三句话，考试经常考察全通和最小相位的分解。

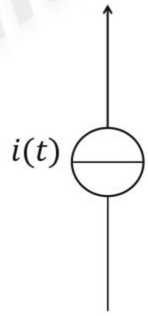
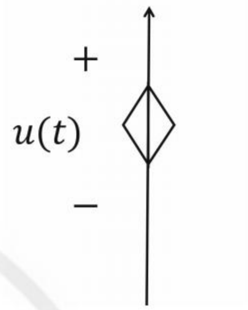
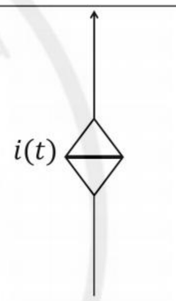
手机扫码观看/分享

【讲解】离散域的最小相位系统

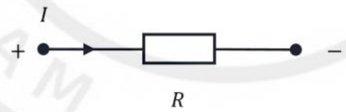
第八章 电路基础

8.1 常见元器件

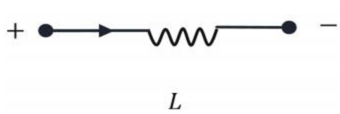
元器件种类	定义	单位	图形表示
电阻	电路中最基本的元件之一，它的作用是阻碍电流的流动，使电流按照一定的规律通过。	欧姆 (Ω)	
电容	能够存储电荷的元件，它由两个导体板和介质组成，当两个导体板之间加上电压时，会形成电场，存储电荷。	法拉 (F)	
电感	由线圈等导体组成的元件，当通过电感的电流发生变化时，会产生电压。	亨利 (H)	
电压源	即理想电压源，是从实际电源抽象出来的一种模型，在其两端总能保持一定的电压而不论流过的电流为多少。	伏 (V)	

电流源	即理想电流源，是从实际电源抽象出来的一种模型，能向外部提供一定的电流而不论其两端的电压为多少。	安培 (A)	
受控电压源	受控电压源即电压受到非本支路以外的其他因素控制的受控源。	伏 (V)	
受控电流源	受控电流源即电流受到非本支路以外的其他因素控制的受控源。	安培 (A)	

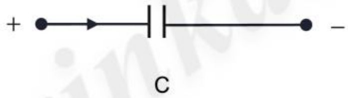
①电阻（单位欧姆Ω）$1\Omega = 10^3 m\Omega = 10^6 u\Omega F = 10^9 n\Omega = 10^{12} p\Omega$



②电感（单位亨利H）$1H = 10^3 mH = 10^6 uH = 10^9 nH = 10^{12} pH$



③电容（单位法F）$1F = 10^3 mF = 10^6 uF = 10^9 nF = 10^{12} pF$



小马哥 Tips：熟练掌握。单位关系也要会！

8.2 电路基本规律

8.2.1 三大定律

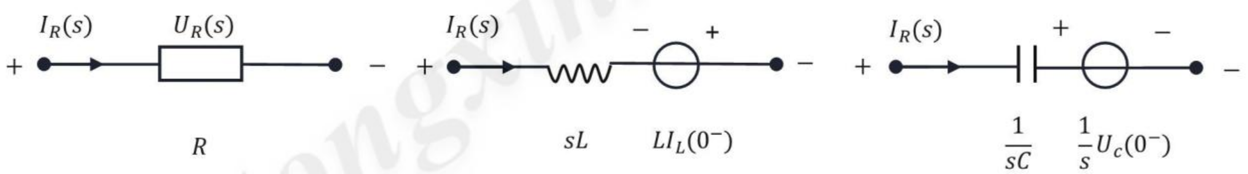
KVL（基尔霍夫电压定律）、KCL（基尔霍夫电流定律）、OL定律（欧姆定律）

定律	定义	贡献方程数量
KCL	任何时刻，对任意节点，所有流出节点的支路电流的代数和恒等于零。	节点数-1
KVL	任何时刻，沿任一回路，所有支路电压的代数和恒等于零。	网孔数=支路数-节点数+1
OL	欧姆定律，$R=U/I$	/

小马哥 Tips：熟练掌握。不会做不出题目！

8.2.2 电路元件的s域模型（约束关系）

元件	电压	电流	S 域阻抗模型
①电阻	$u_R(t)=Ri_R(t)$	$i_R(t)=\frac{u_R(t)}{R}$	R
②电容	$u_C(t)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$	$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$	$\frac{1}{sC}$，若存在$u_C(0^-)$，则需要串联上等效电压源：$\frac{1}{s}u_C(0^-)$
③电感	$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$	$i_L(t)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$	sL，若存在$i_L(0^-)$，则需要串联上等效电压源：$-Li_L(0^-)$



小马哥 Tips：熟练掌握。不会做不出题目！

手机扫码观看/分享

【讲解】电路元件的s域模型

8.3 叠加定理和节点电压法

8.3.1 叠加定理

场景：当电路中存在多个电流源和电压源时，一个电压源或者电流源起作用时，另外的电压源相当于短路，另外的电流源相当于断路。

小马哥 Tips：一般是带初始状态的 S 域等效模型，会等效出多个电压源，注意电压源的方向，分别计算对输出的影响即可。

8.3.2 节点电压法

场景：求解带放大器或受控源的题，需要用到节点电压法。

本质是基尔霍夫电流定律，对某一点列 KCL 方程，消掉无关变量。

节点电压是一种求解对象的电路计算方法。节点电压是在为电路任选一个节点作为参考点（此点通常编号为“A”），并令其电位为零后，其余节点对该参考点的电位。再利用 KVL，KCL，OL 列方程即可.

小马哥 Tips：节点电压是在为电路任选一个节点作为参考点（此点通常编号为“0”），并令其电位为零后，其余节点对该参考点的电位。

解题步骤：节点电压对电路的节点列写 KCL 方程。再利用节点电压分别表示电流，最后求解 KCL 方程。

8.4 电功、电功率和焦耳定律

#	类型	表达式	注
1	电功	$W=UIt$	W表示电功,单位为J；U表示电压,单位为V；I表示电流，单位为A；t表示时间，单位为 s。
2	电功率	$P=UI$	电流单位时间做的功称为电功率。电功率常用P表示，单位为W。根据欧姆定律可知$U=IR$，$I=U/R$，所以电功率还可以用公式$P=\mathrm{I}^2R$和$P=\mathrm{U}^2/\mathrm{R}$来求解。
3	焦耳定律	$Q=I^2Rt$	电流流过导体时导体会发热，这种现象称为电流的热效应。电流流过导体，导体发出的热量与导体流过的电流、导体的电阻和通电的时间有关。Q表示热量，单位为J；R表示电阻，单位为Ω;t 表示时间，单位为s。

小马哥 Tips：**了解即可，考试频率很低，高中知识！**

8.5 戴维南定理与诺顿等效定理

8.5.1 戴维南定理（戴维宁定理）

根据戴维南定理，将线性含源一端口网络等效为电压源与电阻的串联，这个过程就称为戴维南等效电路的求解。其求解过程主要包括开路电压与等效电阻的求解两个部分。开路电压是直接求出端口的电压，等效电阻需要将电流源看成开路，电压源看成短路再去求解。

8.5.2 诺顿定理

诺顿定理是指包含有电源与线性电阻的一端口网络，可以等效为 1 个电流源与 1 个电阻的并联，这个电流源的电流等于该一端口网络的端口短路电流，而电阻等于该一端口网络内部所有电源置零（即不作用）时候的等效电阻：

电流源是直接出端口看成短路，求出流过支路的电流，等效电阻需要将电流源看成开路，电压源看成短路再去求解。

小马哥 Tips：**了解即可，考试频率很低。**

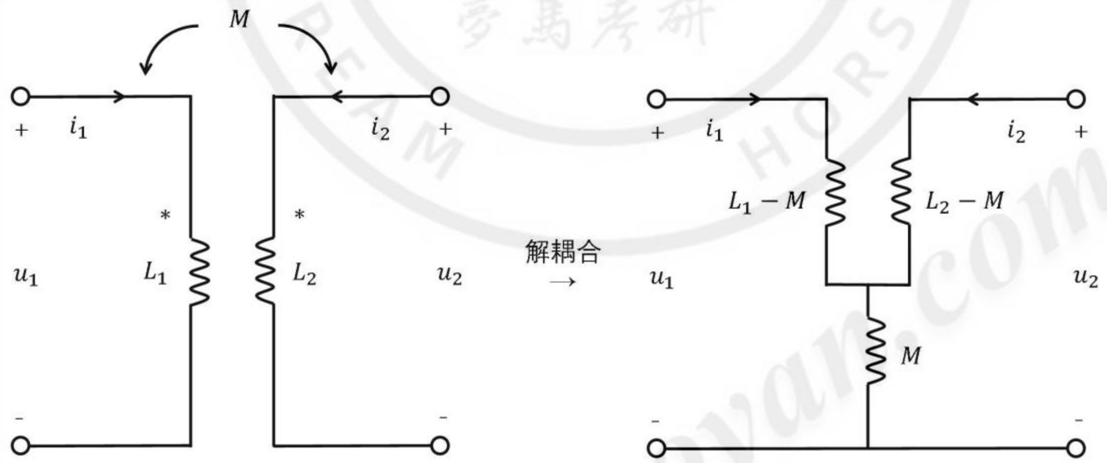
8.6 关于电阻和导纳的串并联（串联分压，并联分流）

#	串联（总阻抗）	并联（总导纳）
电阻：$R=\frac{U}{I}$	电阻串联：总阻抗=各个电阻的和 $R_{总}=R_1+R_2+\cdots$	总阻抗=各个电阻倒数的和的倒数 $\frac{1}{R_{总}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots$
导纳：$G=\frac{1}{R}=\frac{I}{U}$	总导纳=各个导纳倒数的和的倒数 $\frac{1}{G_{总}}=\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}+\cdots$	总导纳=各个导纳的和 $G_{总}=G_1+G_2+\cdots$

小马哥 Tips：必须掌握，因为通过电路元件的s域模型，所有的。

8.7 互感解耦合

8.7.1 同名端解耦合



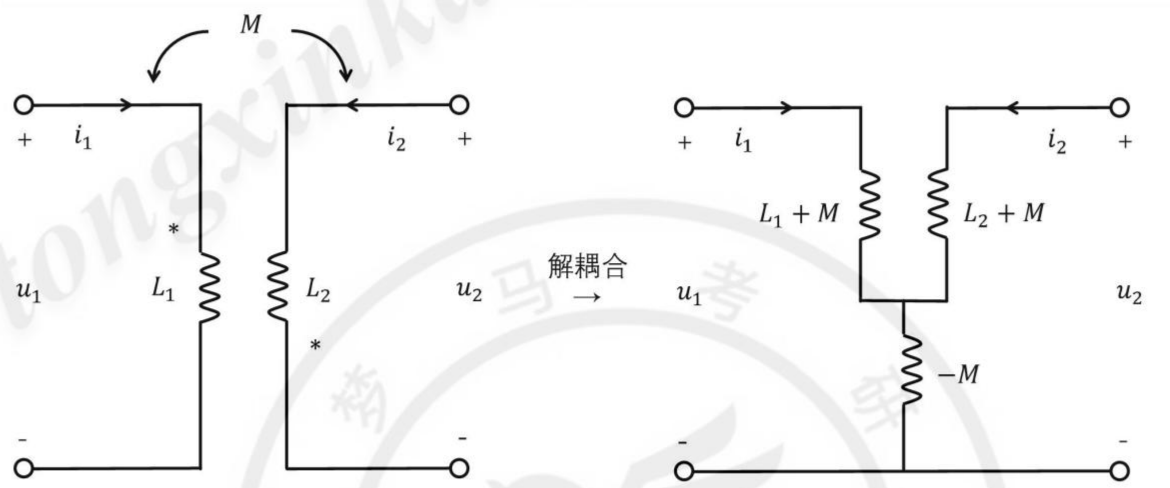
解耦合之后，对左右两侧回路列基尔霍夫电压定律（KVL 方程），有

$$\begin{cases}(L_1-M)\dfrac{d}{dt}i_1(t)+M\dfrac{d}{dt}[i_1(t)+i_2(t)]=u_1(t)\\(L_2-M)\dfrac{d}{dt}i_2(t)+M\dfrac{d}{dt}[i_1(t)+i_2(t)]=u_2(t)\end{cases}$$

化简可得：

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d}{dt}i_1(t)+M\dfrac{d}{dt}i_2(t)=u_1(t) \\ L_2\dfrac{d}{dt}i_2(t)+M\dfrac{d}{dt}i_1(t)=u_2(t) \end{cases}$$

8.7.2 异名端解耦合



对右侧解耦合之后的电路图，对左右两侧回路列基尔霍夫电压定律（KVL 方程）：

$$\begin{cases} (L_1+M)\frac{d}{dt}i_1(t)-M\frac{d}{dt}[i_1(t)+i_2(t)]=u_1(t) \\ (L_2+M)\frac{d}{dt}i_2(t)-M\frac{d}{dt}[i_1(t)+i_2(t)]=u_2(t) \end{cases}$$

化简

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d}{dt}i_1(t)-M\dfrac{d}{dt}i_2(t)=u_1(t) \\ L_2\dfrac{d}{dt}i_2(t)-M\dfrac{d}{dt}i_1(t)=u_2(t) \end{cases}$$

第九章 常见定义及简答题

9.1 信号的定义与分类

9.1.1 信号的定义

信号通常是随时间变化的电压或电流(有时可能是电荷或磁通)。

9.1.2 信号的分类

（1）**连续时间信号**：在时间间隔内，除若干不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值；

（2）**离散时间信号**：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义；

（3）**确定性信号**：分为周期信号和非周期信号，对于指定的某一时刻t可确定一相应的函数值$f(t)$；

（4）**随机性信号**：分为平稳随机信号和非平稳随机信号，具有未可预知的不确定性；

（5）功率信号：具有有限功率的信号，能量无限；

（6）能量信号：具有有限能量的信号，功率为零；

（7）**实信号**：各时刻的函数值为实数，是物理可实现信号；

（8）**复信号**：函数值为复数的信号称为复信号，常用的是复指数信号；

9.2 连续与离散信号分析的特点

连续与离散的区别：

(1)连续时间信号：幅值可以是连续的，也可以只取某些规定值

(2)离散时间信号：时间上是离散的，时间取值可以是均匀的，也可以是不均匀的。

(3)信号的时域运算中，连续时间信号是对自变量的微分、积分运算，离散时间信号是差分、求和运算。

9.3 系统的定义与分类

9.3.1 系统的定义

系统：由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。

9.3.2 系统的分类

连续时间系统：输入输出信号都是连续时间信号。

离散时间系统：输入输出信号都是离散时间信号。

混合系统：输入是连续时间信号，输出是离散时间信号，或反之。

即时系统：有输入信号时即有输出信号，在时域用代数方程描述的系统。

动态系统(记忆系统)：输出信号不仅取决于同时刻激励信号，而且与过去的工作状态有关的系统。

集总参数系统：工作频率的波长远远大于元件尺寸，用常微分方程描述。

分布参数系统：工作频率与元件尺寸可以相比拟，用偏微分方程描述。

线性系统：能同时满足齐次性与叠加性的系统。

非线性系统：不能同时满足齐次性与叠加性的系统。

非时变系统：系统参数不随时间而变化的系统。

时变系统：系统参数随时间而变化的系统。

因果系统：系统响应不会出现在信号激励系统之前的系统

非因果系统：不能满足因果系统特性的系统。

9.4 起始点的跳变

当已知$t=0_-$的初始状态时，初始值不一定等于初始状态值，也就是说起始点可能有跳

变。在求解系统的完全响应时，要用到有关的三个量如下。

$r^{(k)}(0_-)$：初始状态，它决定零输入响应。

$r^{(k)}(0_+)$：初始值，它决定完全响应。

$r_{zs}^{(k)}(0_+)$：跳变量；初始值与初始状态的差值

$$r^{(k)}(0_+) - r^{(k)}(0_-) = r_{zs}^{(k)}(0_+)$$

当初始状态为零时，它就是零状态响应的初始值。分别利用$r_{zs}^{(k)}(0_+)$，$r^{(k)}(0_+)$求零状态响应和完全响应。

手机扫码观看/分享

【讲解】信号中的初始状态和跳变理解

9.5 单位冲激响应$h(t)$

(1)定义

单位冲激响应：系统在单位冲激信号$\delta(t)$激励下产生的零状态响应。

(注：阶跃响应：系统在单位阶跃信号$u(t)$激励下产生的零状态响应)

(2)求$h(t)$方法

冲激函数匹配法：定初始值→定待定系数。

奇异函数平衡法：奇异函数项系数相平衡→定待定系数。

齐次解法：求自由项为$\delta(t)$的响应$\hat{h}(t)$ →据线性时不变系统的性质求出$h(t)$。

(3)由$h(t)$判断系统特性

因果性：

$$h(t) = h(t)u(t)$$

稳定性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \le M$$

9.6 离散时间系统的单位样值响应$h(n)$

(1)定义

单位样值响应：系统在单位样值信号$\delta(n)$激励下产生的零状态响应

(2)求$h(n)$的方法

$$\begin{cases}\text{迭代法: 一般不能直接得到 } h(n) \text{ 的闭式。} \\ \text{经典法}\begin{cases}\text{可由迭代法定初始值} \rightarrow \text{定待定系数。} \\ \text{把单位样值激励等效为起始条件} \rightarrow \text{求解齐次方程。}\end{cases} \\ \text{齐次解法: 求自由项为 } \delta(n) \text{ 的响应 } \hat{h}(n) \rightarrow \text{ 据线性时不变系统的性质求出 } h(n)\text{。}\end{cases}$$

(3)由$h(n)$判断系统特性

$$\begin{cases}\text{因果性：} h(n)=h(n)u(n) \\ \text{稳定性：} \sum|h(n)| \le M\end{cases}$$

9.7 连续与离散时间系统分析的特点

9.7.1 连续与离散时间系统特点

(1)动态系统：在连续系统中为由微积分方程描述的系统(含有动态特性，由微分器、积分器表示)，在离散系统中为由差分方程描述的系统(含有移位寄存功能，由延时器表示)。

(2)对同一系统分析，微分方程的解是**精确解**，而差分方程的解是**近似解**。

(3)经典法、零输入响应与零状态响应法求解系统从物理概念上是一致的，只是连续系统是对连续变量进行微积分运算，而离散系统是对离散变量进行差分运算。

(4)**边界条件**的确定：设激励作用时间为$t=0$，各种情况所需边界条件。

①连续系统

全响应：由$r(0_-)$，$r'(0_-)$，…，$r^{(n-1)}(0_-)$的值，在激励作用下求$r(0_+)$，$r'(0_+)$，…，$r^{(n-1)}(0_+)$值。

零状态响应：由状态$r(0_-)=0$在激励作用下求$r(0_+)$，$r'(0_+)$，…，$r^{(n-1)}(0_+)$值。

零输入响应：直接用$r(0_-)$，$r'(0_-)$，…，$r^{(n-1)}(0_-)$的值。

②离散系统

全响应：由…，$y(-2)$，$y(-1)$值，在激励作用下迭代出$y(0)$，$y(1)$，…，$y(k-1)$值。

零状态响应：由$\cdots=y(-2)=y(-1)=0$，在激励作用下迭代$y(0)$，$y(1)$，…，$y(k-1)$值。

零输入响应：直接用…，$y(-2)$，$y(-1)$的值。

初始状态是否等于初始值，要看起始点是否有跳变。

手机扫码观看/分享

【讲解】离散域边界条件的使用

(5)求解差分方程的迭代法是离散系统特有的，因为差分方程本身就是一个递推过程。

(6)离散系统的单位样值响应与连续系统的单位冲激响应概念对应。单位冲激响应的边界条件要分析起始点的跳变，单位样值响应的边界条件可以应用差分方程的迭代法求得。

(7)卷积运算连续系统与离散系统是非常相似的，仅在于连续变量和离散变量、积分运算和求和运算带来的区别。

(8)求系统的零状态响应的卷积法，连续系统与离散系统相似，一个是求积分，另一个是求和。

9.7.2 傅里叶级数的收敛（狄利克雷条件）

若周期信号$f(t)$，只要满足狄利克雷(Dirichlet)条件，就可保证用傅里叶级数展开式表示。

狄利克雷条件是:

(1)在一个周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个;

(2)在一个周期内，$f(t)$具有有限个极大值和极小值;

(3)在一个周期内，$f(t)$绝对可积，即$\int_{T_1}|f(t)|dt<\infty$。

9.8 周期信号的幅度谱和相位谱

(1)定义

幅度谱：$c_n \sim \omega$或$|F_n| \sim \omega$的关系曲线;

相位谱：$\varphi_n \sim \omega$的关系曲线。

对于实信号，幅度谱是ω的偶函数，相位谱是ω的奇函数。

(2)周期信号频谱的特点:

离散性，谐波性，收敛性。

9.9 功率信号与能量信号

9.9.1 功率信号和功率谱

(1)功率信号

功率信号：信号在时间区间$(-\infty,\ \infty)$内的能量为∞，但平均功率为有限值。

周期信号、阶跃信号、符号函数等为功率信号。

(2)功率信号平均功率P的计算公式

时域公式:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}|f(t)|^2\,dt$$

频域公式(对于周期信号)；

$$P = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

即平均功率P等于频域中直流分量与各次谐波分量平均功率之和。

(3)功率谱密度

$$\phi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

其中$F_T(\omega)$为功率信号$f(t)$的截断函数$f_T(t)$的傅里叶变换。

9.9.2 能量信号和能量谱

(1)能量信号

能量信号:信号在时间区间$(-\infty，\infty)$内的能量为有限值, 而在时间区间$(-\infty，\infty)$内的平均功率$P=0$。大多数时限信号为能量信号。

有些信号既不属于能量信号也不属于功率信号, 例如$f(t)=\mathrm{e}^t$；$\delta(t)$为无定义的非功率非能量信号。

(2)能量信号能量E的计算公式:

①时域公式:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

②频域公式:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

(3)能量谱

令$G(\omega)=|F(\omega)|^2$，$G(\omega)$的单位为J/rad，则

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)d\omega$$

$G(\omega)$称为能量信号的能量频谱密度，简称能量谱。它描述了单位频带内信号的能量随ω分布的规律。

9.10 线性时不变系统的频率响应

9.10.1 系统函数

定义：已知连续 LTI 系统的冲激响应为$h(t)$，设输入信号为$e(t)$，输出为$r(t)$。若

$$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)$$
$$e(t)\leftrightarrow E(j\omega)$$
$$r(t)\leftrightarrow R(j\omega)$$

则

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

根据卷积定理

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

则

$$H(j\omega)=\frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

$H(j\omega)$称为系统函数，也称作系统的频率响应特性。

9.10.2 线性时不变系统对复指数信号的响应

若以$e^{j\omega_0 t}$作为激励，则系统的稳态响应为

$$\begin{aligned}T[e^{j\omega_0 t}]&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0(t-\tau)}d\tau\\&=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau=e^{j\omega_0 t}H(j\omega_0)\end{aligned}$$

其中$T[\ ]$表示以[ ]中的信号作为激励求得的响应。或用傅里叶变换分析法表示

$$R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(j\omega_0)$$
$$r(t)=T[e^{j\omega_0 t}]=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

表明系统的响应等于激励$e^{j\omega_0 t}$乘以加权函数$H(j\omega_0)$。复指数信号$e^{j\omega_0 t}$是 LTI 系统特征值为$H(j\omega_0)$的特征函数。

9.10.3 线性时不变系统对傅里叶级数表示式的响应

$$T\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

9.10.4 一般非周期信号经系统的响应

当输入$e(t)$为非周期信号，则

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

$$r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

令

$$R(j\omega) = |R(j\omega)|e^{j\varphi_R(\omega)}$$
$$E(j\omega) = |E(j\omega)|e^{i\varphi_E(\omega)}$$
$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi_H(\omega)}$$

则

$$|R(j\omega)| = |E(j\omega)||H(j\omega)|$$
$$\varphi_R(\omega) = \varphi_E(\omega) + \varphi_H(\omega)$$

说明$H(\mathrm{j}\omega)$是一个加权函数，信号经系统传输后，其幅度频谱被$|H(\mathrm{j}\omega)|$加权，相位被$\varphi_H(\omega)$修正。幅频特性$|H(\mathrm{j}\omega)|$有时也被称为**系统的增益**。

9.11 带宽

9.11.1 定义

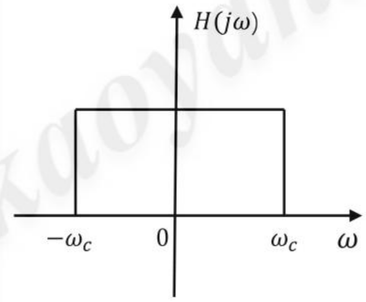
对数概念

$$dB = 10log_{10}\, x，3dB = 30log_{10}\, x$$

dB是一个比值，是一个纯计数方法，在不同的领域有不同的名称，也代表不同含义；在“信号与系统”中，通常用对数描述信号经过系统增益或者衰减的信数，或者用来描述系统本身特性。

9.11.2 系统的带宽

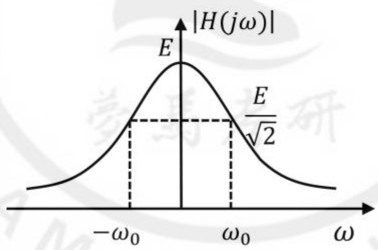
①绝对带宽



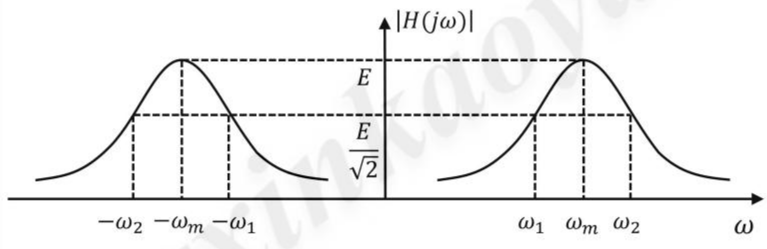
理想低通滤波器中的截止频率ω_c(正频率部分)称为系统的带宽

②$3dB$带宽，或者半功率点带宽（正频率部分）

对于因果系统，带宽的常见定义是$3dB$带宽，就低通滤波器而言，$3dB$带宽定义为幅度谱$|H(j\omega)|$下降为$\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$的正频率部分，如下图所示，带宽为ω_0



对于带通滤波器而言，$3dB$带宽定义为中心频率的幅度谱$|H(j\omega_m)|$下降为$\frac{|H(j\omega_m)|}{\sqrt{2}}$时对应的频率差值，如下图所示，带宽为$\omega_2-\omega_1$



9.11.3 信号的带宽

①第一零点带宽

某些信号频谱函数的第一个零点内集中了信号的大部分能量(或功率)，将其频谱的第一个零点定义为其带宽。如矩形脉冲信号，其频谱的第一个零点为$\frac{2\pi}{\tau}$，定义此信号的带宽为$\frac{2\pi}{\tau}$。

②3 dB带宽

3 dB带宽也称半功率点带宽，同系统的 3 dB带宽。

③有限带宽信号

如果$|F(\omega)|=0$，$|\omega|>\omega_m$，则信号称为有限带宽信号，带宽为ω_m。

9.12 相关

9.12.1 自相关与互相关

设$f_1(t)$与$f_2(t)$为能量有限信号

#		能量信号的相关函数 设$f_1(t)$与$f_2(t)$能量有限信号	功率信号的相关函数 设$f_1(t)$与$f_2(t)$为功率有限信号
1	互相关	$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2^*(t-\tau)dt$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t+\tau)f_2^*(t)dt$	$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_1(t)f_2\cdot(t-\tau)dt\right]$
2	自相关	$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t-\tau)dt$ $=\int_{-\infty}^{\infty}f(t+\tau)f^*(t)dt$	$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)f^*(t-\tau)dt\right]$
3	性质	$R_{12}(\tau)=R_{21}^*(-\tau)$ $R(\tau)=R^*(-\tau)$	-

9.12.2 相关与卷积的关系

①实数信号的相关

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)dt=f_1(\tau)*f_2(t-\tau)$$

②复数信号的相关

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2^*(t-\tau)dt=f_1(\tau)*f_2^*(t-\tau)$$

总结：卷积为反折、平移、相乘、积分：相关为平移、相乘、积分。卷积有反折操作，相关没有，因此对于偶函数的卷积，由于反折之后依旧为偶函数，则卷积和相关操作结果一样；两个关于纵坐标对称的矩形波悉积和相关结果相同。

9.12.3 相关定理

维纳一欣钦关系

$$\begin{cases}R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega\\ \phi(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\end{cases}$$

即功率有限信号的功率谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换。在实际中，有些信号无法求它的傅里叶变换，但可用求自相关函数的方法，达到求功率谱的目的。

9.12.4 信号经线性时不变系统后输出的自相关函数和能量谱密度

①能量信号

$$\psi_r(\omega)=|H(j\omega)|^2\psi_e(\omega)$$

②功率信号

$$\phi_r(\omega)=|H(j\omega)|^2\phi_e(\omega)$$
$$R_r(\tau)=R_e(\tau)*R_h(\tau)$$

9.12.5 离散序列的相关

$$R_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-m)，R_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-m)$$

9.13 系统的可控制性与可观测性

9.13.1 可控性

①定义

当系统用状态方程描述时，给定系统的任意初始状态，可以找到容许的输入量(即控制

变量)，在有限时间之内把系统的所有状态引向状态空间的原点(即零状态)，如果可以做到这一点，则称系统是完全可控制的。如果只有对部分状态变量可以做到这一点，则称系统是不完全可控制的。

②判断方法

方法1:

若可控阵$\boldsymbol{M}=\left(\boldsymbol{B}:\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}:\cdots:\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\right)$为满秩，则系统即为完全可控的，否则即为不完全可控的。

方法2:

设系统的特征根为单根，系统为单输入，则系统状态完全可控的充要条件是:当矩阵$\hat{\boldsymbol{A}}$为对角阵时，矩阵$\hat{\boldsymbol{B}}$中无零元素。若$\hat{\boldsymbol{B}}$中出现零元素，则与该$\hat{\boldsymbol{B}}$中零元素相对应的状态变量就不能被输入变量控制。

设系统的特征根为单根，系统为多输入，则系统状态完全可控的充要条件是:当矩阵$\hat{\boldsymbol{A}}$为对角阵时，矩阵$\hat{\boldsymbol{B}}$中无全为零元素的行。

9.13.2 可观性

①定义

如果系统用状态方程描述时，在给定控制后，能在有限时间间隔内$(0<t<t_1)$根据系统输出唯一地确定系统的所有起始状态，则称系统完全可观；若只能确定部分起始状态，则称系统不完全可观。

②判断方法:

方法1:若可观阵

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\\ \boldsymbol{CA}\\ \cdots\\ \vdots\\ \cdots\\ \boldsymbol{CA}^{k-1}\end{pmatrix}$$

为满秩，则系统即为完全可观的，否则即为不完全可观的。

方法 2:

设系统的特征根为单根，系统为单输出，则系统状态完全可观的充要条件是:当矩阵$\hat{\boldsymbol{A}}$为对角阵时(此时各状态变量之间已无联系)，矩阵$\hat{\boldsymbol{C}}$中无零元素。若$\hat{\boldsymbol{C}}$中出现零元素，则与该零元素相对应的状态变量就不可观。

设系统的特征根为单根，系统为多输出，则系统状态完全可观的充要条件是:当矩阵$\hat{A}$为对角阵时，矩阵$\hat{\boldsymbol{C}}$中无全为零元素的列。

9.13.3 可控和可观性与系统转移函数之间的关系

若$\boldsymbol{H}(s)$中不出现零点与极点的相消，则系统一定是完全可控和完全可观的。

若$\boldsymbol{H}(s)$中出现零点与极点的相消，则系统就是不完全可控或不完全可观的。

9.14 全通系统和最小相位系统

在用微分方程和差分方程表示的连续时间和离散时间实的因果稳定 LTI 系统中，有两种特殊的零极点分布，使它们具有特殊的幅频特性和相频特性；一个在整个频域有恒定的幅频响应，称为全通系统；另一个具有最小变化的相位特性，称为最小相位系统。

我仍然在不懈努力使这份公式宝典日趋完善中。

电子版，公众号通信考研小马哥，后台回复：公式宝典

我会持续更新！

最后真心祝愿你们成功上岸！

愿所有的努力都不被辜负！